Resolução - Monotonia e Extremos relativos

1. Apenas o gráfico da opção C representa uma função que tem um mínimo em $x = 0$, pois todos os pontos que estão na vizinhança do ponto $x = 0$ têm ordenada superior ou igual ao valor da ordenada do ponto que tem abcissa igual a 0.

   Opção(C)

   2022, 2ªfase

2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f:

$$f'(x) = \left(\tfrac{1}{3}x^3 + ax^2 + a^2x + \sqrt{2}\right)' = x^2 + 2ax + a^2$$

   Os extremos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2ax + a^2$

   $A = 1 \qquad b = 2a \qquad c = a^2$

   Usando a fórmula resolvente temos:

   $x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4Ac}}{2A} \Leftrightarrow x = \frac{-2a \pm\sqrt{(2a)^2-4\times1\times a^2}}{2\times1} \Leftrightarrow x = \frac{-2a \pm\sqrt{4a^2-4a^2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2a}{2} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x = -a$

   Para provarmos que a função f não tem extremos vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\infty$	$-a$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\nearrow$

Concluimos que a função f é crescente em todo o seu domínio, ou seja, não tem extremos.

2022, 2ªfase

3. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f no intervalo $]-\infty,-2[$:

$$f'(x) = \left(\frac{e^{2-x}}{x+2}\right)' = \frac{-e^{2-x}(x+2)-e^{2-x}}{(x+2)^2} = \frac{e^{2-x}(-x-3)}{(x+2)^2}$$

Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{e^{2-x}(-x-3)}{(x+2)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{2-x}(-x-3) = 0 \;\wedge\; (x+2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; e^{2-x} = 0 \; _{(cond.\, impossível)} \;\vee\; -x-3 = 0 \;\wedge\; x+2 \neq 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; e^{2-x} = 0 \; _{(cond.\, impossível)} \;\vee\; x = -3 \;\wedge\; x \neq -2$

Logo, $f'(x)$ tem um zero em $x = -3$.

$f'(-4) = \frac{e^{2+4}(4-3)}{(-4+2)^2} = \frac{e^6}{4} > 0$

$f'(-1) = \frac{e^{2+1}(1-3)}{(-1+2)^2} = -\frac{2e^3}{1} = -2e^3 < 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\infty$	-3		-2
$f'(x)$	$+$	0	$-$	n.d.
$f(x)$	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	n.d.

O gráfico de f é crescente no intervalo $]-\infty, -3]$ e é decrescente no intervalo $[-3, -2[$.

$f(-3) = \frac{e^{2+3}}{-3+2} = -e^5$

A função f tem um máximo relativo igual a $-e^5$.

2022, 1ªfase

4. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f no intervalo $]0, 1[$:

$f'(x) = [-x^2(1 + 2\ln x)]' = -2x(1 + 2\ln x) + \frac{2}{x} \times -x^2 = -2x(1 + 2\ln x) - 2x =$

$= -2x(1 + 2\ln x + 1) = -2x(2 + 2\ln x)$

Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -2x(2 + 2\ln x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -2x = 0 \;\vee\; 2 + 2\ln x = 0 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; \ln x = -1 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = e^{-1} \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = \frac{1}{e}$

Logo, $f'(x)$ tem um zero em $]0,1[$ igual a $\frac{1}{e}$.

$f'(0,1) > 0$

$f'(0,5) < 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$f'(x)$	n.d.	$+$	0	-	n.d.
$f(x)$	n.d.	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	n.d.

O gráfico de f é crescente no intervalo $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ e é decrescente no intervalo $\left[\frac{1}{e}, 1\right[$.

$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\left(\frac{1}{e}\right)^2\left[1 + 2\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right] = -\frac{1}{e^2}[1 + 2 \times -1] = \frac{1}{e^2}$

A função f tem um máximo relativo em $x = \frac{1}{e}$ igual a $\frac{1}{e^2}$.

2021, 1ªfase

5. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função

h de domínio $[0, \frac{\pi}{2}[$:

$h'(x) = (\sin x + \cos^2 x)' = \cos x + 2\cos x \times (-\sin x) = \cos x - 2\cos x \sin x =$
$= \cos x(1 - 2\sin x)$

Os extremos relativos de h correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$h'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos x(1 - 2\sin x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos x = 0 \;\vee\; 1 - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \;\vee\; \sin x = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + k\pi \;\vee\; x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\vee\; x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0,\; x = \frac{\pi}{2} \;\notin [0, \frac{\pi}{2}[\;\vee\; x = \frac{\pi}{6} \in [0, \frac{\pi}{2}[\;\vee\; x = \frac{5\pi}{6} \notin [0, \frac{\pi}{2}[$

Para $k = -1,\; x = \frac{\pi}{2} \;\notin [0, \frac{\pi}{2}[\;\vee\; x = \frac{\pi}{6} \notin [0, \frac{\pi}{2}[\;\vee\; x = \frac{5\pi}{6} \notin [0, \frac{\pi}{2}[$

Para $k = 1,\; x = \frac{\pi}{2} \;\notin [0, \frac{\pi}{2}[\;\vee\; x = \frac{\pi}{6} \notin [0, \frac{\pi}{2}[\;\vee\; x = \frac{5\pi}{6} \notin [0, \frac{\pi}{2}[$

Logo, $h'(x)$ tem um zero em $x = \frac{\pi}{6}$.

$h'(0) = \cos 0(1 - 2\sin 0) = 1$

$h'\left(\frac{\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(1 - 2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) > 0$

$h'(\frac{\pi}{4}) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(1 - 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) < 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função h vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$	1	$+$	0	$-$	n.d.
$h(x)$	mínimo	$\nearrow$	máximo	$\searrow$	n.d.

O gráfico de h é crescente no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ e é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$h(0) = \sin 0 + \cos^2 0 = 1$

$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

A função h tem um mínimo relativo igual a 1 e um máximo absoluto igual a $\frac{5}{4}$.

2021, 2ªfase

6. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f no intervalo $]-\infty, 1[$:

   $f'(x) = [x - 2 + \ln(3 - 2x)]' = 1 - \frac{2}{3-2x}$

   Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

   $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - \frac{2}{3-2x} = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 = \frac{2}{3-2x} \;\Leftrightarrow\; 3 - 2x = 2 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{2}$

   Logo, $f'(x)$ tem um zero em $x = \frac{1}{2}$.

$f'(0) = 1 - \frac{2}{3-2\times 0} = \frac{1}{3} > 0$

$f'(0,8) = 1 - \frac{2}{3-2\times 0,8} < 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	$+$	0	$-$	n.d.
$f(x)$	$\nearrow$	máximo	$\searrow$	n.d.

O gráfico de f é crescente no intervalo $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ e é decrescente no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

$f(0) = \frac{1}{2} - 2 + \ln\left(3 - 2\times\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \ln 2$

A função f tem um máximo relativo em $x = \frac{1}{2}$ igual a $-\frac{3}{2} + \ln 2$.

2021, Época especial

7. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g no intervalo $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = (x^2 \ln x)' = 2x\ln x + \frac{1}{x}\times x^2 = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$$

Os extremos relativos de g correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$g'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x(2\ln x + 1) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0 \ \vee \ 2\ln x + 1 = 0 \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ x = 0 \ \vee \ \ln x = -\frac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ x = 0 \ \vee \ x = e^{-\frac{1}{2}}$

Logo, $g'(x)$ tem um zero em $]0, +\infty[$ igual a $e^{-\frac{1}{2}}$.

$g'(e^{-1}) < 0$

$g'(e) > 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função g vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$	n.d.	-	0	+
$g(x)$	n.d.	$\searrow$	Mínimo	$\nearrow$

O gráfico de g é decrescente no intervalo $]0, e^{-\frac{1}{2}}]$ e é crescente no intervalo $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$.

$g(e^{-\frac{1}{2}}) = (e^{-\frac{1}{2}})^2 \ln(e^{-\frac{1}{2}}) = e^{-1} \times (-\frac{1}{2})\frac{1}{e} \times (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2e}$

A função g tem um mínimo relativo igual a $-\frac{1}{2e}$.

2020, 1ª fase

8. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$g'(x) = \left(\frac{e^{-x}}{x}\right)' = \frac{-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2} = \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}$$

Os extremos relativos de g correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$g'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2} = 0 \ \Leftrightarrow \ e^{-x}(-x-1) = 0 \ \wedge \ x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ e^{-x} = 0_{\ (cond.\ impossível)} \ \vee \ -x-1 = 0 \ \wedge \ x \neq 0 \ \Leftrightarrow \ e^{-x} = 0_{\ (cond.\ impossível)} \ \vee$
$x = -1 \ \wedge \ x \neq 0$

Logo, $g'(x)$ tem um zero em $x = -1$.

$g'(-2) = \frac{e^2(2-1)}{(-2)^2} = \frac{e^2}{4} > 0$

$g'(-\frac{1}{2}) = \frac{e^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}-1)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{4}} = -\frac{\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}}{\frac{1}{4}} = -\frac{4e^{\frac{1}{2}}}{2} = -2e^{\frac{1}{2}} < 0$

$g'(1) = \frac{e^{-1}(-1-1)}{1^2} = -2e^{-1} < 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função g vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	-	n.d	-
$g(x)$	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	n.d	$\searrow$

O gráfico de g é crescente no intervalo $]-\infty, -1]$ e é decrescente no intervalo $[-1, 0[$ $\cup$ $]0, +\infty[$.

$g(1) = \frac{e^1}{-1} = -e$

A função g tem um máximo relativo igual a $-e$.

2019, 1ª fase, caderno 2

9. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f de domínio $]0,\pi[$:

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{2+\cos x}\right)' = \frac{\cos x(2+\cos x)-(-\sin x).\sin x}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$$

Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\cos x + 1 = 0 \;\wedge\; (2+\cos x)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \cos x = -\frac{1}{2} \;\wedge\; 2+\cos x \neq 0 \;\Leftrightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \;\vee\; x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi\;,\; k \in \mathbb{Z} \wedge$
$\cos x \neq -2$ $_{(cond.\ universal)}$ $\Leftrightarrow\; x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \;\vee\; x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\;,\; k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, $x = \frac{2\pi}{3} \in]0,\pi[\;\vee\; x = \frac{4\pi}{3} \notin]0,\pi[$

Para $k = -1$, $x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3} \notin]0,\pi[\;\vee\; x = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3} \notin]0,\pi[$

Para $k = 1$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3} \notin]0,\pi[\;\vee\; x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{10\pi}{3} \notin]0,\pi[$

Logo, $f'(x)$ tem um zero em $x = \frac{2\pi}{3}$ no intervalo $]0,\pi[$.

$f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{2\cos\frac{\pi}{2}+1}{(2+\cos\frac{\pi}{2})^2} = \frac{1}{4} > 0$

$f'(\frac{3\pi}{4}) = \frac{2\cos\frac{3\pi}{4}+1}{(2+\cos\frac{3\pi}{4})^2} = \frac{-2\cos\frac{\pi}{4}+1}{(2-\cos\frac{\pi}{4})^2} = \frac{-2\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{(2-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{-\sqrt{2}+1}{(2-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} < 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	n.d.	+	0	-	n.d.
$f(x)$	n.d.	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	n.d.

O gráfico de f é crescente no intervalo $]0, \frac{2\pi}{3}]$ e é decrescente no intervalo $[\frac{2\pi}{3}, \pi[$.

$f(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2+\cos\frac{2\pi}{3}} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{2-\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

A função f tem um máximo relativo igual a $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2019, Época especial, caderno 2

10. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g no intervalo $]0, \pi]$:

$$g'(x) = (\frac{1}{2-\sin(2x)})' = \frac{-(-2\cos(2x))}{(2-\sin(2x))^2} = \frac{2\cos(2x)}{(2-\sin(2x))^2}$$

Os extremos relativos de g correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$g'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2\cos(2x)}{(2-\sin(2x))^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\cos(2x) = 0 \;\wedge\; (2-\sin(2x))^2 \neq 0_{\;cond.\,universal} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \cos(2x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

Para $k = -1,\; x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} < 0 \;\notin]0, \pi]$

Para $k=0$, $x=\frac{\pi}{4} \in]0,\pi]$

Para $k=1$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4} \in]0,\pi]$

Para $k=2$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{2}=\frac{5\pi}{4} \notin]0,\pi]$

Logo, $g'(x)$ tem dois zeros em $]0,\pi]$.

$g'(\frac{\pi}{6})>0$

$g'(\frac{\pi}{2})<0$

$g'(\pi)=\frac{2\cos(2\pi)}{(2-\sin(2\pi))^2}=\frac{1}{2}$

De modo a estudarmos a monotonia da função g vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$g'(x)$	n.d.	+	0	-	0	+	$\frac{1}{2}$
$g(x)$	n.d.	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	Mínimo	$\nearrow$	Máximo

O gráfico de g é crescente no intervalo $]0,\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4},\pi]$ e é decrescente no intervalo $[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$.

$g(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2-\sin(\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{2-1}=1$

$g(\frac{3\pi}{4})=\frac{1}{2-\sin(\frac{3\pi}{2})}=\frac{1}{2-(-1)}=\frac{1}{3}$

$g(\pi)=\frac{1}{2-\sin(2\pi)}=\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}$

A função g tem um mínimo relativo igual a $\frac{1}{3}$ e dois máximos relativos iguais a $\frac{1}{2}$ e 1.

2018, 1ª fase, caderno 2

11. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g:

$g'(x) = [\frac{k}{x} + f(x)]' = (\frac{k}{x} + \frac{\ln x}{x})' = -\frac{k}{x^2} + \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x}{x^2} = -\frac{k}{x^2} + \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{-k+1-\ln x}{x^2}$

Os extremos relativos da função g correspondem aos zeros da primeira derivada, logo para $x = 1$ temos que:

$g'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{-k+1-\ln 1}{1^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-k+1-0}{1} = 0 \Leftrightarrow -k+1 = 0 \Leftrightarrow k = 1$

2017, 2ª fase, grupo II

12. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f para $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$:

$f'(x) = (\frac{2+\sin x}{\cos x})' = \frac{(\cos x)(\cos x) - (-\sin x)(2+\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + 2\sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1+2\sin x}{\cos^2 x}$

Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1+2\sin x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\sin x = 0 \wedge \cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \wedge \cos x \neq 0$ (Como $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ então $\cos x > 0$) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

Para $k=-1$, $x=-\frac{\pi}{6}-2\pi \vee x=\frac{7\pi}{6}-2\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{13\pi}{6} \notin]-\frac{\pi}{2},0[\vee x=-\frac{5\pi}{6} \notin]-\frac{\pi}{2},0[$

Para $k=0$, $x=-\frac{\pi}{6} \in]-\frac{\pi}{2},0[\vee x=\frac{7\pi}{6} \notin]-\frac{\pi}{2},0[$

Para $k=1$, $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi \vee x=\frac{7\pi}{6}+2\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{11\pi}{6} \notin]-\frac{\pi}{2},0[\vee x=\frac{19\pi}{6} \notin]-\frac{\pi}{2},0[$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		0
$f'(x)$	n.d.	-	0	+	n.d.
$f(x)$	n.d.	$\searrow$	Mínimo	$\nearrow$	n.d.

O gráfico de f é decrescente no intervalo $]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}]$, é crescente no intervalo $[-\frac{\pi}{6},0[$ e tem um mínimo para $x=-\frac{\pi}{6}$.

2016, 2ª fase, grupo II

13. Vamos determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f:

$$f'(x)=(x^2e^{1-x})'=2xe^{1-x}-e^{1-x}x^2=e^{1-x}(2x-x^2)$$

Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{1-x}(2x-x^2)=0 \Leftrightarrow e^{1-x}=0_{\,(Eq.imp.)} \vee 2x-x^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; x(2-x)=0 \; \Leftrightarrow \; x=0 \vee 2-x=0 \; \Leftrightarrow \; x=0 \vee x=2$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	-
$f(x)$	Mínimo	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$

O gráfico de f é decrescente no intervalo $[2, +\infty[$, é crescente no intervalo $[0, 2]$, tem um máximo para $x = 2$ e um mínimo para $x = 0$.

2015, Época especial, grupo II