Resolução - Equações e inequações (exponenciais e logarítmicas)

1. $(e^x - 1)\ln(5-2x) + e^x \ln(3-x) = \ln(3-x) \ \wedge\ 5-2x>0 \ \wedge\ 3-x>0 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow e^x \ln(5-2x) - \ln(5-2x) + e^x \ln(3-x) = \ln(3-x) \ \wedge\ -2x > -5 \ \wedge\ -x > -3 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow e^x[\ln(5-2x) + \ln(3-x)] = \ln(3-x) + \ln(5-2x) \ \wedge\ x < \frac{5}{2} \ \wedge\ x < 3 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow e^x[\ln\big((5-2x)(3-x)\big)] = \ln\big((3-x)(5-2x)\big) \ \wedge\ x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow e^x[\ln\big((5-2x)(3-x)\big)] - \ln\big((3-x)(5-2x)\big) = 0 \ \wedge\ x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \big(\ln(2x^2 - 11x + 15)\big)(e^x - 1) = 0 \ \wedge\ x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \ln(2x^2 - 11x + 15) = 0 \ \vee\ e^x - 1 = 0 \ \wedge\ x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 15 = e^0 \ \vee\ e^x = 1 \ \wedge\ x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 14 = 0 \ \vee\ x = \ln 1 \ \wedge\ x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x = 2 \ \vee\ x = \frac{7}{2} \ \vee\ x = 0 \ \wedge\ x < \frac{5}{2}$

   C.S.$= \{0, 2\}$

   2022, 1ªfase

2. $\frac{1}{2}\log_2(9x+1) = \log_2(6x) \ \wedge\ 9x+1>0 \ \wedge\ 6x>0 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{9x+1} = \log_2(6x) \ \wedge\ x > -\frac{1}{9} \ \wedge\ x > 0 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow (\sqrt{9x+1})^2 = (6x)^2 \ \wedge\ x > 0 \Leftrightarrow 9x + 1 = 36x^2 \ \wedge\ x > 0 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow -36x^2 + 9x + 1 = 0 \ \wedge\ x > 0$

   $a = -36 \qquad b = 9 \qquad c = 1$

   Usando a fórmula resolvente temos:

   $x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \ \Leftrightarrow\ x = \frac{-9 \pm\sqrt{9^2-4\times(-36)\times 1}}{2\times(-36)} \ \Leftrightarrow\ x = \frac{-9 \pm\sqrt{81+144}}{-72} \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ x = \frac{-9+15}{-72} \vee x = \frac{-9-15}{-72} \ \Leftrightarrow \ x = -\frac{6}{72} \vee x = \frac{24}{72} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ x = -\frac{1}{12} \vee x = \frac{1}{3}$

Como $x > 0 \quad C.S. = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

2022, Época especial

3. Vamos determinar o domínio da equação:

$(1-x)e^{x-1} > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0$ (porque $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x-1} > 0$) $\Leftrightarrow x < 1$

Ou seja, esta equação está definida em $]-\infty, 1[$.

Resolvendo a equação:

$\ln\left[(1-x)e^{x-1}\right] = x \Leftrightarrow e^{\ln\left[(1-x)e^{x-1}\right.} = e^x \Leftrightarrow (1-x)e^{x-1} = e^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - x = \frac{e^x}{e^{x-1}} \Leftrightarrow 1 - x = e^{x-(x-1)} \Leftrightarrow 1 - x = e \Leftrightarrow x = 1 - e$

$x = 1 - e \in]-\infty, 1[$, logo este é o único número real que é solução da equação.

2021, 1ªfase

4. Resolvendo a equação:

$x\ln(1-x) - \ln(1-x) = (1-x)\ln(3-2x) \ \wedge \ 1 - x > 0 \ \wedge \ 3 - 2x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(1-x)(x-1) = (1-x)\ln(3-2x) \ \wedge \ x < 1 \ \wedge \ x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\ln(1-x)(1-x) = (1-x)\ln(3-2x) \ \wedge \ x < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(1-x)^{-1} = \ln(3-2x) \ \wedge \ 1-x \neq 0 \ \wedge \ x < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1-x} = 3-2x \ \wedge \ x < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1-x)(3-2x) = 1 \ \wedge \ x < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \ \wedge \ x < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ \vee \ x = 2 \ \wedge \ x < 1$

C.S.= $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

2021, 2ªfase

5. $e^{-x}(4+3^{2x}) \geq 5 \Leftrightarrow 4e^{-x} + e^x \geq 5 \Leftrightarrow \frac{4}{e^x} + e^x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x + 4 \geq 0 \wedge e^x \neq 0$

Fazendo a mudança de variável $y = e^x$, ficamos com a inequação $y^2 - 5y + 4 \geq 0$.

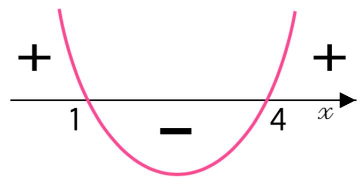
Consideremos a equação $y^2 - 5y + 4 = 0$

$a = 1 \qquad b = -5 \qquad c = 4$

Usando a fórmula resolvente temos:

$y = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow y = \frac{5 \pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times4}}{2\times1} \Leftrightarrow y = \frac{5 \pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{5+3}{2} \vee y = \frac{5-3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 1 \vee y = 4$



Calculando na variável original x vem que:

$$1 = e^x \vee 4 = e^x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \ln 4$$

Como $-2 \leq x \leq 2$ então C.S.$=]-\infty, 0] \cup [\ln 4, +\infty[\cap [-2, 2] = [-2, 0] \cup [\ln 4, 2]$

2021, Época especial

6. $f(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow x + \ln(e^x + 1) = 2x + 1 \Leftrightarrow \ln(e^x + 1) = x + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x + 1 = e^{x+1} \Leftrightarrow e^x + 1 = e^x e \Leftrightarrow e^x - e^x e = -1 \Leftrightarrow e^x(1-e) = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x = -\frac{1}{1-e} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e-1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{e-1}\right) \Leftrightarrow x = \ln(e-1)^{-1} \Leftrightarrow x = -\ln(e-1)$

2020, 1ªfase