Resolução - Equação da reta tangente

1. Para determinarmos a abcissa do ponto do gráfico da função g, no intervalo $]-\infty, 0[$,em que a reta tangente ao gráfico da função é paralela à reta de equação $y = -2x$ vamos resolver a equação: $g'(x) = -2 \Leftrightarrow 3e^{2x} - 7e^x = -2 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow 3(e^x)^2 - 7e^x + 2 = 0 \ (*_1)$

   Fazendo a mudança de variável: $y = e^x$

   $(*_1) \ 3y^2 - 7y + 2 = 0$

   $a = 3 \qquad b = -7 \qquad c = 2$

   Usando a fórmula resolvente temos:

   $y = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \ \Leftrightarrow \ y = \frac{-(-7) \pm\sqrt{(-7)^2-4\times3\times2}}{2\times3} \ \Leftrightarrow \ y = \frac{4 \pm\sqrt{49-24}}{6} \ \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \ y = \frac{7+5}{6} \vee x = \frac{7-5}{6} \ \Leftrightarrow \ y = 2 \vee y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow e^x = 2 \vee e^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = -\ln 3$

   No intervalo $]-\infty, 0[$, a abcissa do ponto do gráfico da função g em que a reta tangente ao gráfico da função é paralela à reta de equação $y = -2x$ é igual a $x = -\ln 3$.

   2022, 2ª fase

2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g:

$$g'(x) = \left(\ln(1+e^x) - x\right)' = \frac{e^x}{1+e^x} - 1$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 0 é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$m = g'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} - 1 = -\frac{1}{2}$

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 0 é da forma:

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto $(0, g(0))$ (que pertence à reta) na equação da reta tangente, conseguimos determinar a constante b:

$y = -\frac{1}{2}x + b \;\Leftrightarrow\; g(0) = -\frac{e^2}{4} \times 0 + b \;\Leftrightarrow\; \ln(1+e^0) - 0 = +b \;\Leftrightarrow b = \ln 2$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 0 é:

$$y = -\frac{1}{2}x + \ln 2$$

Sabendo que A é o ponto de intersecção da reta r com os eixo Oy então as suas coordenadas são da forma $A(0, g(0))$.

Como $g(0) = \ln 2$ então as coordenadas do ponto A são $(0, \ln 2)$.

O ponto B é o ponto de intersecção da reta r com os eixo Ox então as suas coordenadas são da forma $B(x_b, 0)$.

Como $0 = -\frac{1}{2}x_b + \ln 2 \Leftrightarrow x_b = -2\ln 2$ então as coordenadas do ponto B são $(-2\ln 2, 0)$.

A área do triângulo $[OAB]$ é igual a:

$$A_{[AOB]} = \frac{b\times h}{2} = \frac{\overline{OA}\times\overline{OB}}{2} = \frac{\ln 2\times 2\ln 2}{2} = (\ln 2)^2$$

2022, Época especial

3. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f para $x \in]-\infty, 0[$:

$$f'(x) = (\frac{x-e^{-x}}{x})' = \frac{(1+e^{-x})x-(x-e^{-x})}{x^2} = \frac{x+xe^{-x}-x+e^{-x}}{x^2} = \frac{e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -2 é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$m = f'(-2) = \frac{e^2(-2+1)}{(-2)^2} = -\frac{e^2}{4}$

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -2 é da forma:

$$y = -\frac{e^2}{4}x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto $(-2, f(-2))$ (que pertence à reta) na equação da reta tangente, conseguimos determinar a constante b:

$y = -\frac{e^2}{4}x + b \ \Leftrightarrow \ f(-2) = -\frac{e^2}{4} \times (-2) + b \ \Leftrightarrow \ \frac{-2-e^2}{-2} = \frac{e^2}{2} + b \ \Leftrightarrow \frac{2+e^2}{2} = \frac{e^2}{2} + b \ \Leftrightarrow$ $b = \frac{2+e^2-e^2}{2} \ \Leftrightarrow b = 1$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -2 é:

$$y = -\frac{e^2}{4}x + 1$$

2021, 2ª fase

4. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f para $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x-\ln x}\right)' = \frac{x-\ln x-(1-\frac{1}{x})(x)}{(x-\ln x)^2} = \frac{x-\ln x-x+1}{(x-\ln x)^2} = \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1 é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$m = f'(1) = \frac{1-\ln 1}{(1-\ln 1)^2} = \frac{1}{1^2} = 1$

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f é da forma:

$$y = x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto $(1, f(1))$ (que pertence à reta) na equação da reta tangente, conseguimos determinar a constante b:

$y = x + b \;\Leftrightarrow\; f(1) = 1 + b \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{1-\ln 1} = 1 + b \;\Leftrightarrow \frac{1}{1} = 1 + b \;\Leftrightarrow\; 1 = 1 + b \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b = 0$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1 é:

$$y = x$$

2019, 1ª fase, caderno 2

5. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g para $x \in]-\infty, 0]$:

$$g'(x) = (x \ln(1-x))' = \ln(1-x) - \left(\frac{1}{1-x}\right)x$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa -1 é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$m = g'(-1) = \ln(1-(-1)) - \left(\frac{1}{1-(-1)}\right)(-1) = \ln 2 + \frac{1}{2}$

Opção(A)

2019, Época especial, caderno 2

6. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f para $x \in]1-\pi, 1[$:

$$f'(x) = (\tfrac{2x-2}{\sin(x-1)})' = \tfrac{2\sin(x-1)-\cos(x-1)(2x-2)}{\sin^2(x-1)}$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $1-\frac{\pi}{2}$ é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m = f'(1-\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{2\sin[(1-\frac{\pi}{2})-1]-\cos[(1-\frac{\pi}{2})-1][2(1-\frac{\pi}{2})-2]}{\sin^2[(1-\frac{\pi}{2})-1]} = \tfrac{2\sin(-\frac{\pi}{2})-\cos(-\frac{\pi}{2})(-\pi)}{\sin^2(-\frac{\pi}{2})} = \tfrac{-2\sin(\frac{\pi}{2})-\cos(\frac{\pi}{2})(-\pi)}{\sin^2(-\frac{\pi}{2})} =$$

$$= \tfrac{-2\times 1-0}{(-1)^2} = -2$$

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f é da forma:

$$y = -2x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto $(1-\frac{\pi}{2}, f(1-\frac{\pi}{2}))$ (que pertence à reta) na equação da reta tangente, conseguimos determinar a constante b:

$$y = -2x + b \;\Leftrightarrow\; f(1-\tfrac{\pi}{2}) = -2(1-\tfrac{\pi}{2}) + b \;\Leftrightarrow\; \tfrac{2(1-\frac{\pi}{2})-2}{\sin[(1-\frac{\pi}{2})-1]} = -2+\pi+b \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tfrac{-\pi}{\sin(-\frac{\pi}{2})} = -2+\pi+b \;\Leftrightarrow\; \tfrac{-\pi}{-1} = -2+\pi+b \;\Leftrightarrow\; \pi = -2+\pi+b \;\Leftrightarrow\; b = 2$$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $1-\frac{\pi}{2}$ é:

$$y = -2x + 2$$

2017, Época especial, grupo II

7. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f para $x > 0$:

$$f'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \tfrac{1}{x}$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$ é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m = f'(\tfrac{1}{2}) = 1 - \tfrac{1}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 = -1$$

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f é da forma:

$$y = x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ (que pertence à reta) na equação da reta tangente, conseguimos determinar a constante b:

$y = -x + b \Leftrightarrow f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + b \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + b \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \ln 2^{-1} = b$
$\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 - (-1)\ln 2 = b \Leftrightarrow b = 1 + \ln 2$

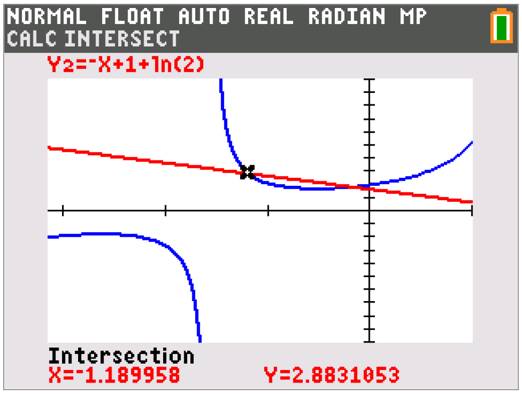
Assim, a equação reduzida da reta r é:

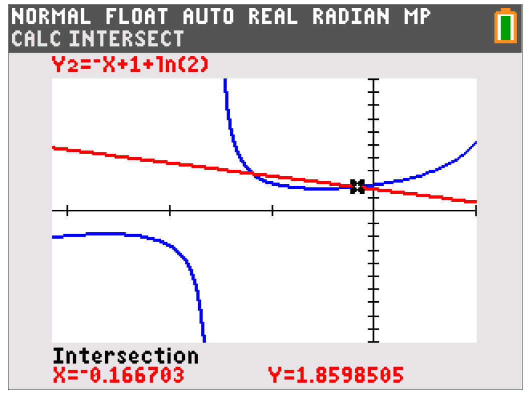
$$y = -x + 1 + \ln 2$$

Como a reta r intersecta o gráfico de f em dois pontos, A e B, cujas abcissas pertencem ao intervalo $]-\frac{\pi}{2}, 0[$, então temos que:

$$\frac{2+\sin x}{\cos x} = -x + 1 + \ln 2$$

Recorrendo à calculadora gráfica, vamos determinar as abcissas dos pontos A e B:





$x_A \approx -1,19$ $x_B \approx -0,17$

2016, 2ª fase, grupo II

8. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f para $x \geq 0$:

$$f'(x) = [\ln(e^x + x)]' = \frac{e^x+1}{e^x+x}$$

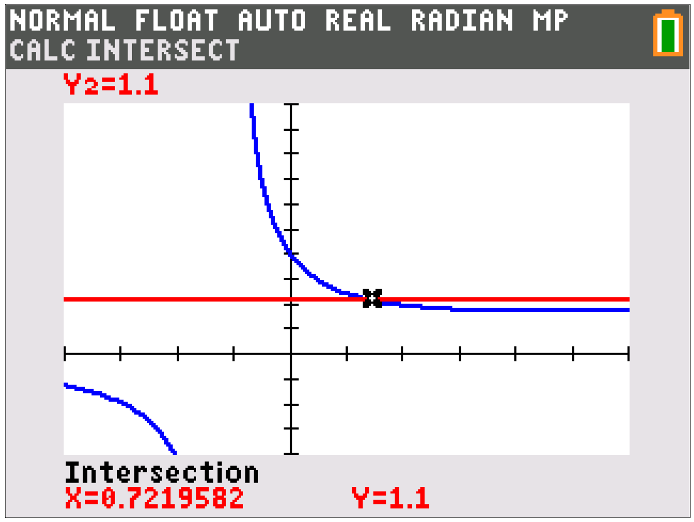
Como o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abssica a é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m = f'(a) \quad \Leftrightarrow \quad 1,1 = \frac{e^a+1}{e^a+a}$$

Recorrendo à calculadora gráfica, vamos determinar a constante a (abcissa do ponto A):

Assim, temos que $a \approx 0,72$.

2016, Época especial, grupo II



9. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f para $x > 4$:

$$f'(x) = [\ln(x-3) - \ln x]' = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abssica 4 é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m = f'(4) = \frac{1}{4-3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f é da forma:

$$y = \frac{3}{4}x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto $(4, f(4))$ (que pertence à reta) na equação da reta tangente, conseguimos determinar a constante b:

$y = \frac{3}{4}x + b \;\Leftrightarrow\; \ln(4-3) - \ln 4 = \frac{3}{4} \times 4 + b \;\Leftrightarrow\; b = \ln 1 - \ln 4 - 3 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; b = -\ln 4 - 3$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 4 é:

$$y = \frac{3}{4}x - \ln 4 - 3$$

2015, 2ª fase, grupo II

10. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f:

$$f'(x) = [a \sin x]' = a \cos x$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abssica $\frac{2\pi}{3}$ é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m_r = f'(\tfrac{2\pi}{3}) = a \cos \tfrac{2\pi}{3} = a \cos(\pi - \tfrac{\pi}{3}) = -a \cos \tfrac{\pi}{3} = -\tfrac{a}{2}$$

Sabendo que a inclinação da reta r é igual a $\frac{\pi}{6}$ vem que:

$$\tan \tfrac{\pi}{6} = -\tfrac{a}{2} \;\Leftrightarrow\; \tfrac{\sqrt{3}}{3} = -\tfrac{a}{2} \;\Leftrightarrow\; -a = \tfrac{2\sqrt{3}}{3} \;\Leftrightarrow\; a = -\tfrac{2\sqrt{3}}{3}$$

2015, Época especial