**Resolução - Concavidades e Pontos de inflexão**

1. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função $g$ no intervalo $]0,\pi[$:

   $g''(x) = \left(x+2\cos^2 x\right)' = 1+2\times 2\cos x\times(-\sin x) = 1-2\times 2\cos x\sin x = 1-2\sin(2x)$

   Os pontos de inflexão de $g$ correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

   $g''(x) = 0 \Leftrightarrow 1-2\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \ \vee \ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

   Para $k=0$, $x = \frac{\pi}{12} \in ]0,\pi[ \ \vee \ x = \frac{5\pi}{12} \in ]0,\pi[$

   Para $k=1$, $x = \frac{13\pi}{12} \notin ]0,\pi[ \ \vee \ x = \frac{17\pi}{12} \notin ]0,\pi[$

   Para $k=-1$, $x = -\frac{11\pi}{12} \notin ]0,\pi[ \ \vee \ x = -\frac{7\pi}{12} \notin ]0,\pi[$

   Logo, $g''(x)$ tem dois zeros em $x = \frac{\pi}{12}$ e $x = \frac{5\pi}{12}$ no intervalo $]0,\pi[$.

   $g''(\frac{\pi}{13}) = 1-2\sin\left(\frac{2\pi}{13}\right) < 0$

   $g''(\frac{6\pi}{12}) = 1-2\sin\pi > 0$

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de $g$ tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{12}$ | | $\frac{5\pi}{12}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | n.d. | $+$ | $0$ | - | $0$ | $+$ | n.d. |
| $g(x)$ | n.d. | $\smile$ | P.I. | $\frown$ | P.I. | $\smile$ | n.d. |

O gráfico de $g$ tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{12}, \pi\right[$.

As abcissas dos pontos de inflexão do gráfico de $g$ são $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{5\pi}{12}$.

2022, 2ª fase

2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função $g$:

$$g''(x) = \left(\frac{x-e^{3x}}{x}\right)' = \frac{(1-3e^{3x})x-(x-e^{3x})}{x^2} = \frac{x-3xe^{3x}-x+e^{3x}}{x^2} = \frac{e^{3x}(-3x+1)}{x^2}$$

Os pontos de inflexão de $g$ correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{3x}(-3x+1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow e^{3x}(-3x+1) = 0 \ \wedge \ x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{3x} = 0_{\,cond.impossível} \ \vee \ -3x+1 = 0 \ \wedge \ x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \ \wedge \ x \neq 0$

$g''(\frac{1}{4}) = \frac{e^{3\times\frac{1}{4}}\left(-3\times\frac{1}{4}+1\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} > 0$

$g''(1) = \frac{e^{3\times1}(-3\times1+1)}{1^2} < 0$

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de $g$ tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

| | 0 | | $\frac{1}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | n.d. | + | 0 | - |
| $g(x)$ | n.d. | $\smile$ | P.I. | $\frown$ |

O gráfico de $g$ tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0, \frac{1}{3}\right]$.

A abcissa do ponto de inflexão do gráfico de $g$ é $\frac{1}{3}$.

2022, Época especial

3. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função $f$:

$f'(x) = \left(\frac{2+\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}.x-1(2+\ln x)}{x^2} = \frac{1-2-\ln x}{x^2} = \frac{-1-\ln x}{x^2}$

Os pontos de inflexão correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1-\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow -1 - \ln x = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x = -1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = e^{-1} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \wedge x \neq 0$

Logo, $f''(x)$ tem um zero em $x = \frac{1}{e}$ no intervalo $]0, +\infty[$.

$f''(1) = \frac{-1-\ln 1}{1^2} = -1 < 0$

$f''\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{-1-\ln e^{-2}}{(e^{-2})^2} = \frac{-1-(-2)}{e^{-4}} = \frac{1}{e^{-4}} = e^4 > 0$

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

| $x$ | 0 | | $\frac{1}{e}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | n.d. | + | 0 | - |
| $f(x)$ | n.d. | $\smile$ | P.I. | $\frown$ |

O gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]-\infty, \frac{1}{e}\right]$.

O ponto de inflexão da função $f$ tem abcissa igual a $\frac{1}{e}$.

2020, 2ª fase

4. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função $g$:

$g'(x) = \left(\frac{1}{4}\cos(2x) - \cos x\right)' = -\frac{1}{2}\sin(2x) + \sin x$

Calculando a expressão algébrica da segunda derivada da função $g$:

$g''(x) = \left(-\frac{1}{2}\sin(2x) + \sin x\right)' = -\cos(2x) + \cos x$

Os pontos de inflexão correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -\cos(2x) + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = x + 2k\pi \vee 2x = -x + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2k\pi \vee 3x = 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = \frac{2k\pi}{3} \ , k \in \mathbb{Z}$

Para $k = -1$, $x = -2\pi \notin ]0, \pi[ \vee x = -\frac{2\pi}{3} \notin ]0, \pi[$

Para $k = 0$, $x = 0 \notin ]0, \pi[$

Para $k = 1$, $x = 2\pi \notin ]0, \pi[ \vee x = \frac{2\pi}{3} \in ]0, \pi[$

Para $k = 2$, $x = 4\pi \notin ]0, \pi[ \vee x = \frac{4\pi}{3} \notin ]0, \pi[$

Logo, $g''(x)$ tem um zero em $x = \frac{2\pi}{3}$ no intervalo $]0, \pi[$.

$g''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{2} = -\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2} = -(-1) + 0 = 1 > 0$

$g''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(2 \times \frac{3\pi}{4}\right) + \cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{3\pi}{2} + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{3\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{4} =$
$= 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de $g$ tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

| $x$ | $0$ | | $\frac{2\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | n.d | $+$ | $0$ | - | n.d |
| $g(x)$ | n.d | $\smile$ | P.I | $\frown$ | n.d |

O gráfico de $g$ tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0, \frac{2\pi}{3}\right]$.

$g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\cos\left(2 \times \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{4}\cos\frac{4\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{4}\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$
$= -\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

A função $g$ tem um ponto de inflexão de coordenadas $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3}{8}\right)$.

2019, 2ª fase, caderno 2

5. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função $f$:

$f'(x) = (x^3 + 6\ln x)' = 3x^2 + \frac{6}{x}$

Calculando a expressão algébrica da segunda derivada da função $f$:

$f''(x) = (3x^2 + \frac{6}{x})' = 6x - \frac{6}{x^2} = 6(x - \frac{1}{x^2})$

Os pontos de inflexão correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 6(x - \frac{1}{x^2}) = 0 \;\Leftrightarrow\; x - \frac{1}{x^2} = 0 \wedge x^2 \neq 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{x^2} \wedge x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 = 1 \wedge x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1 \wedge x \neq 0$

Logo, $f''(x)$ tem um zero em $x = 1$.

$f''(\frac{1}{2}) = \frac{6}{2} - \frac{6}{(\frac{1}{2})^2} = 3 - \frac{6}{\frac{1}{4}} = 3 - 24 = -21 < 0$

$f''(2) = 6 \times 2 - \frac{6}{2^2} = 12 - \frac{6}{4} = 12 - \frac{3}{2} = \frac{21}{2} > 0$

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

| $x$ | 0 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | n.d | - | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | n.d | $\frown$ | P.I. | $\smile$ |

O gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]0, 1]$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[1, +\infty[$.

$f(1) = 1^3 + 6\ln 1 = 1 + 0 = 1$

A função $f$ tem um ponto de inflexão de coordenadas $(1, 1)$.

2018, Época especial, caderno 2

6. De acordo com a figura 1 podemos construir o quadro de sinal da segunda derivada da função $f$:

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | $\frown$ | P.I. | $\smile$ |

Assim temos que:

$$f''(1) > 0 \text{ e } f''(2) > 0 \Rightarrow f''(1) \times f''(2) > 0$$

**Opção(D)**

2017, 1ª fase, grupo I

7. O gráfico da função $g$ é simétrico relativamente ao eixo das abcissas do gráfico da função $f(x-5)$, que por sua vez é uma translação horizontal do gráfico de $f$ associada ao vetor de coordenadas $(5, 0)$.

Através da tabela de variação de sinal da função $f''(x)$ podemos construir uma tabela de variação de sinal da função $-f''(x-5)$:

| $x$ | $-\infty$ | -5 | | 5 | | 15 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x-5)$ | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |
| $-f''(x-5)$ | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - |
| $g(x)$ | $\smile$ | P.I. | $\frown$ | P.I. | $\smile$ | P.I. | $\frown$ |

O gráfico de $g$ tem concavidade voltada para baixo no intervalo $]-5,5[\,\cup\,]15,+\infty[$.

**Opção(C)**

2017, 2ª fase, grupo I

8. Através da figura 2 podemos construir um quadro de sinal de $f'(x)$ bem como de $f''(x)$ e conseguimos estudar o seu produto:

| $x$ | $-\infty$ | -2 | | 0 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - | - | - | 0 | + |
| $f''(x)$ | - | - | - | 0 | + | + | + |
| $f'(x)\times f''(x)$ | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |

C.S.$=[-2,0]\cup[2,+\infty[$

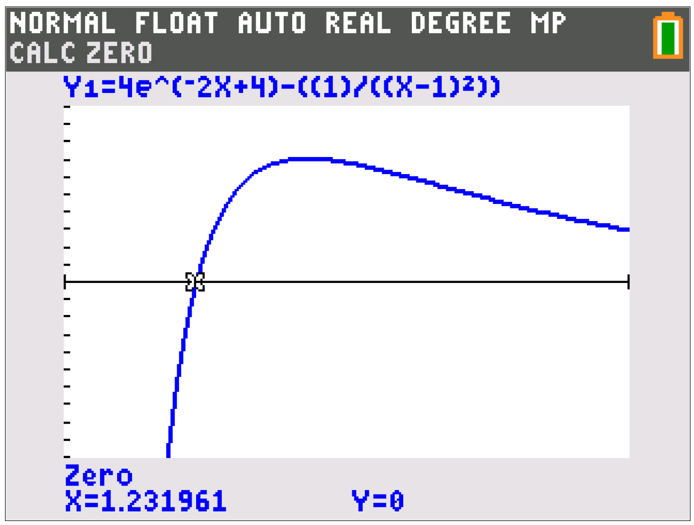
2017, Época especial, grupo I

9. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função $f$, para $x>1$:

$$f'(x) = [e^{-2x+4} + \ln(x-1)]' = -2e^{-2x+4} + \frac{1}{x-1}$$

$$f''(x) = [-2e^{-2x+4} + \frac{1}{x-1}]' = 4e^{-2x+4} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora representamos o gráfico da função $f''(x)$ no intervalo pedido $]1, 2[$ e calculamos o zero de $f''(x)$ neste intervalo.




$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 1,23$$

2017, Época especial, grupo II

10. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função $f$:

$f''(x) = [e^x(x^2+x+1)]' = e^x(x^2+x+1) + (2x+1)e^x = e^x(x^2+x+1+2x+1) =$
$= e^x(x^2+3x+2)$

Os pontos de inflexão correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2+3x+2) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0_{\,(Eq.imp.)} \vee x^2+3x+2 = 0$

$a = 1 \qquad b = 3 \qquad c = 2$

Usando a fórmula resolvente:

$x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{9-4\times1\times2}}{2\times1} \Leftrightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-3+1}{2} \vee x = \frac{-3-1}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = -2$

Assim, os pontos de inflexão da função $f$ têm abcissas -2 e -1.

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

| $x$ | $-\infty$ | -2 | | -1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | 0 | - | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\smile$ | P.I. | $\frown$ | P.I. | $\smile$ |

O gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]-2,1[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]-\infty,-2[\,\cup\,]-1,+\infty[$.

2016, 1ª fase, grupo II

11. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função $f$ para $x \in ]-\frac{3\pi}{2},0[$:

$$f'(x) = (\tfrac{1}{4}x^2 + \cos x)' = \tfrac{1}{2}x - \sin x$$

$$f''(x) = (\tfrac{1}{2}x - \sin x)' = \tfrac{1}{2} - \cos x$$

Os pontos de inflexão de $f$ correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Para $k = -1$, $x = \frac{\pi}{3} - 2\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} \notin ]-\frac{3\pi}{2}, 0[ \vee x = -\frac{7\pi}{6} \notin ]-\frac{3\pi}{2}, 0[$

Para $k = 0$, $x = \frac{\pi}{3} \notin ]-\frac{3\pi}{2}, 0[ \vee x = -\frac{\pi}{3} \in ]-\frac{3\pi}{2}, 0[$

Para $k = 1$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} \notin ]-\frac{3\pi}{2}, 0[ \vee x = \frac{5\pi}{6} \notin ]-\frac{3\pi}{2}, 0[$

Assim, o único ponto de inflexão da função $f$ tem abcissa igual a $-\frac{\pi}{3}$.

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

| $x$ | $-\frac{3\pi}{2}$ | | $-\frac{\pi}{3}$ | | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | n.d. | + | 0 | - | n.d. |
| $f(x)$ | n.d. | $\smile$ | P.I. | $\frown$ | n.d. |

O gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]-\frac{\pi}{3}, 0[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}[ \cup ]-1, +\infty[$.

2016, Época especial, grupo II

12. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função $f$ para $x \in ]\frac{1}{2}, +\infty[$:

$$f'(x) = [(x+1)\ln x]' = \ln x + (x+1)\frac{1}{x} = \ln x + 1 + \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = (\ln x + 1 + \frac{1}{x})' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

Os pontos de inflexão de $f$ correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x-1}{x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x - 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1 \wedge x^2 \neq 0 \; (x \in ]\tfrac{1}{2}, +\infty[)$$

Assim, o único ponto de inflexão da função $f$ tem abcissa igual a 1.

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | n.d. | - | 0 | + |
| $f(x)$ | n.d. | $\frown$ | P.I. | $\smile$ |

O gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]\frac{1}{2}, 1[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]1, +\infty[$. O ponto de inflexão da função $f$ tem coordenadas $(1, f(1))$, ou seja, $(1, 0)$.

2015, 1ªfase, grupo II

13. O gráfico A não pode ser o gráfico da função $f$ porque tem um ponto em que a função não é contínua, ou seja, tem um ponto onde a função não tem derivada, enquanto que a função $f$ tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio.

O gráfico B não pode ser o gráfico da função $f$ porque porque tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]-\infty, 0[$ portanto neste intervalo a segunda derivada é positiva, enquanto que $f''(x) < 0$ para $x \in ]-\infty, 0[$.

O gráfico C não pode ser o gráfico da função $f$ porque a reta tangente em $x = 0$ tem declive negativo , isto é, a primeira derivada é negativa em $x = 0$, enquanto que na função $f$ sabemos que $f'(0) > 0$.

2015, 2ªfase, grupo II

14. De acordo com a figura 3, sabemos que o único ponto de inflexão da função $f$ é em $x = 0$ e que a função $f$ tem concavidade voltada para baixo no intervalo $]-\infty, 0[$ e tem concavidade voltada para cima no intervalo $]0, +\infty[$.

**Opção(C)**

2015, Época especial, grupo I