Exercícios de exames - Trigonometria

1. Na Figura 1, está representado o triângulo [ABC] .

   Seja $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ a amplitude, em radianos, do ângulo BAC.

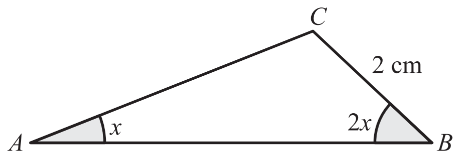

Figura 1

   Sabe-se que:

   - $C\hat{B}A = 2x$
   - $\overline{BC} = 2$ cm

   Mostre que o comprimento de [AB], em centímetros, é dado, para cada valor de x, pela expressão

$$8\cos^2 x - 2$$

   2022, 1ªfase

2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

   Na Figura 2, estão representadas, em referencial o.n. Oxy, as retas r e s.

   A reta r é definida pela equação $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1$.

   A reta s passa pela origem do referencial e tem inclinação α.

   O ponto A é o ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox.

   O ponto B é o ponto de intersecção das duas retas.

   Sabe-se que $cos\ \alpha = \frac{1}{2}$.

   Determine a área do triângulo [AOB] .

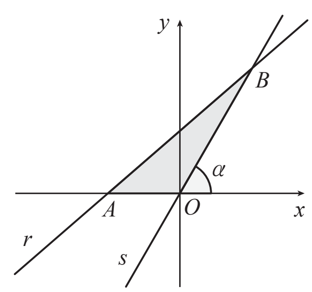

Figura 2

   2022, 2ªfase

3. Na Figura 3, está representado um triângulo, $[ABC]$, inscrito numa semicircunferência de diâmetro $AC = 4$.

   Seja α a amplitude do ângulo CAB.

   Mostre que a área da região sombreada na figura é dada, em função de α, por

$$2\pi - 4\sin(2\alpha)$$

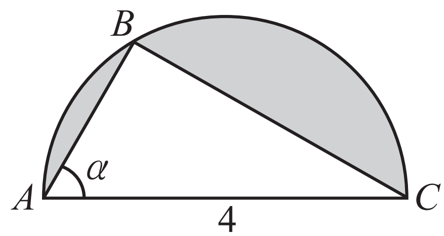

Figura 3

   2022, Época especial

4. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro em O e raio 3 e o triângulo [ABC]

   Sabe-se que:

   - o segmento de reta [AB] é um diâmetro da circunferência;
   - α é a inclinação da reta AB $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}\right), \pi\right[$
   - o ponto C pertence ao semieixo positivo Ox
   - a reta BC é paralela ao eixo Oy

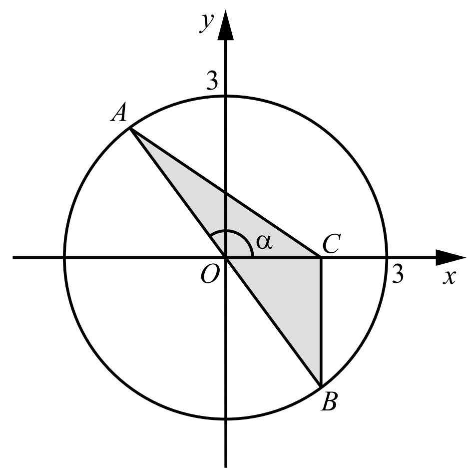

Figura 4

   Mostre que a área do triângulo [ABC] é dada pela expressão

$$-9\sin\alpha\cos\alpha$$

   2021, 1ªfase

5. Sabe-se que $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{5}$ e que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

   Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de $\tan(\pi - \alpha) + 2\cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$

   Apresente o resultado na forma $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{N}$

   2021, 2ªfase

6.

Na Figura 5, está representado, num referencial o.n. xOy, o arco de circunferência AB, contido no primeiro quadrante do plano cartesiano, cujo centro é a origem do referencial e cujo raio é igual a r, $(r > 0)$.

O ponto A pertence ao eixo Ox e o ponto B pertence ao eixo Oy

Seja P um ponto do arco AB, distinto de A e de B, e seja d o comprimento do arco AP

O ponto S pertence ao eixo das ordenadas e tem ordenada igual à do ponto P. O ponto T pertence ao eixo das abcissas e tem abcissa igual à do ponto P

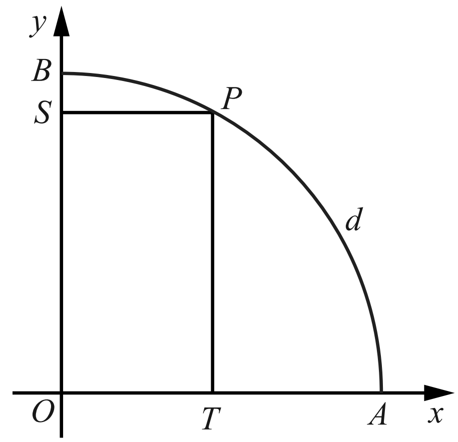

Figura 5

Mostre que uma expressão que dá o valor de $\overline{BS} + \overline{TA}$, em função de d e de r, é

$$r\left(2 - \sin\left(\frac{d}{r}\right) - cos\left(\frac{d}{r}\right)\right)$$

2021, Época especial

7. Qual é a solução da equação $2\cos x + 1 = 0$ no intervalo $[-\pi, 0]$?

(A) $-\frac{5\pi}{6}$ **(B)** $-\frac{2\pi}{3}$ **(C)** $-\frac{\pi}{3}$ **(D)** $-\frac{\pi}{6}$

2019, 1ª fase, caderno 2

8. Qual é o valor de $\sin\left(3\arccos\frac{1}{2}\right)$?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(C)** 0 **(D)** 1

2019, 2ª fase, caderno 2

9. Seja g a função definida em $]0,\pi[$ por $g(x)=\frac{1}{4}\cos(2x)-\cos x$

Seja f a função, de domínio $]-\frac{\pi}{2},0[$, definida por $f(x)=g(-x)+g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

Qual das expressões seguintes também pode definir a função f?

(A) $\sin x+\cos x$

(B) $-\sin x-\cos x$

(C) $\sin x-\cos x$

(D) $-\sin x+\cos x$

2019, 2ª fase, caderno 2

10. Qual é o valor de $\arcsin(1)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$?

(A) $\frac{7\pi}{6}$ **(B)** $\frac{\pi}{6}$ **(C)** $\frac{3\pi}{4}$ **(D)** $\frac{\pi}{4}$

2018, 1ª fase, caderno 2

11. Considere a função f , definida em $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ por $f(x)=\cos x$

Qual dos seguintes conjuntos é o contradomínio da função f?

(A) $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ **(B)** $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

(C) $\left[\frac{1}{2},1\right]$ **(D)** $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

2018, Época especial, caderno 2

12. Seja f a função, de domínio A e contradomínio $]-1,+\infty[$, definida por $f(x) = tgx$
Qual dos conjuntos seguintes pode ser o conjunto A?

(A) $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ **(B)** $]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}[$ **(C)** $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}[$ **(D)** $]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}[$

2017, 1ª fase, grupo I

13. Considere o desenvolvimento de $\left(2x\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{x}\right)^2$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$

Determine os valores de α, pertencentes ao intervalo $]\pi, 2\pi[$, para os quais o termo independente de x, neste desenvolvimento, é igual a 1
Resolva este item recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

2017, 2ª fase, grupo II

14. Na Figura 6, está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro na origem e raio 1
Sabe-se que

- o ponto A está no segundo quadrante e pertence à circunferência;
- o ponto D tem coordenadas $(1, 0)$
- o ponto C pertence ao primeiro quadrante e tem abcissa igual à do ponto D
- o ponto B pertence ao eixo Oy e é tal que o segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo Ox
- os ângulos AOC e COD são geometricamente iguais e cada um deles tem amplitude α $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

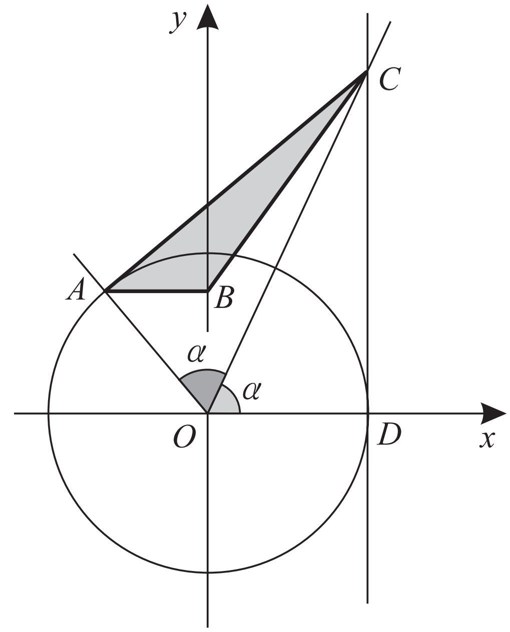

Figura 6

Mostre que a área do triângulo $[ABC]$, representado a sombreado, é dada por $\frac{tg\alpha \, \cos^2 2\alpha}{2}$

2017, Época especial, grupo II

15. Na Figura 7, estão representados o círculo trigonométrico e um trapézio retângulo $[OPQR]$
Sabe-se que

- o ponto P tem coordenadas $(0, 1)$
- o ponto R pertence ao quarto quadrante e à circunferência.

Seja α a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}R$

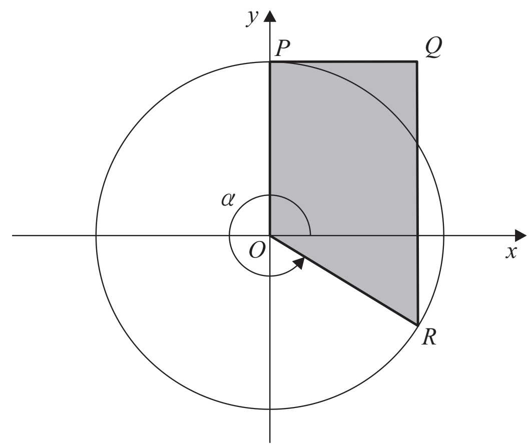

Figura 7

Qual das expressões seguintes dá a área do trapézio $[OPQR]$, em função de α?

(A) $\frac{\cos\alpha}{2} + \sin\alpha\cos\alpha$ **(B)** $\frac{\cos\alpha}{2} - \sin\alpha\cos\alpha$

(C) $\cos\alpha + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}$ **(D)** $\cos\alpha - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}$

2016, 1ª fase, grupo I

16. Na Figura 8, está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1
Sabe-se que

- os diâmetros $[AC]$ e $[BD]$ são perpendiculares;
- o ponto P pertence ao arco AB
- $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência;
- o ponto R pertence a $[OD]$ e é tal que $[QR]$ é paralelo a $[AC]$

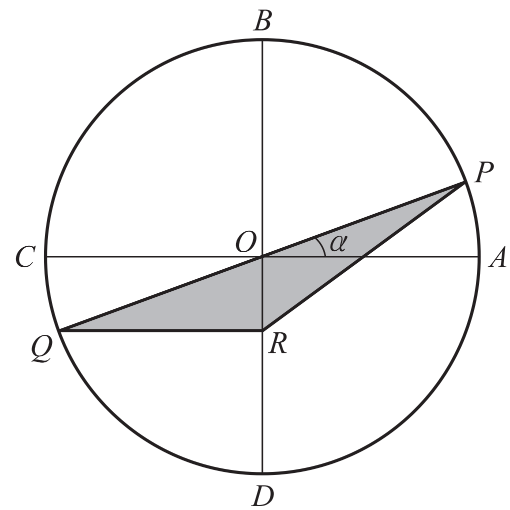

Figura 8

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOP $\left(\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[\right)$

Qual das seguintes expressões dá a área do triângulo $[PQR]$, representado a sombreado, em função de α?

(A) $\frac{\cos(2\alpha)}{4}$ **(B)** $\frac{\sin(2\alpha)}{4}$ **(C)** $\frac{\cos(2\alpha)}{2}$ **(D)** $\frac{\sin(2\alpha)}{2}$

2016, 2ª fase, grupo I

17. Na Figura 9, está representado o círculo trigonométrico.

Sabe-se que

- o ponto A pertence ao primeiro quadrante e à circunferência;
- o ponto B pertence ao eixo Ox
- o ponto C tem coordenadas $(1,0)$
- o ponto D pertence à semirreta $\dot{O}A$
- os segmentos de reta $[AB]$ e $[DC]$ são paralelos ao eixo Oy

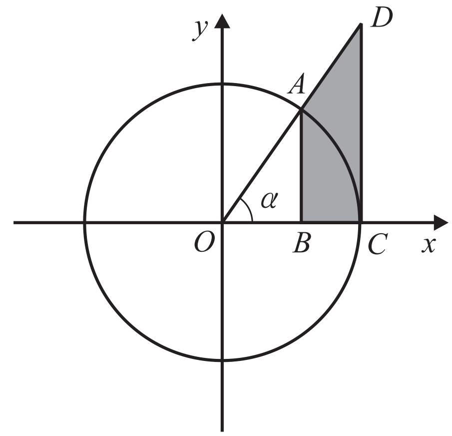

Figura 9

Seja α a amplitude do ângulo COD $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Qual das expressões seguintes dá a área do quadrilátero $[ABCD]$, representado a sombreado, em função de α?

(A) $\frac{tg\,\alpha}{2} - \frac{\sin(2\alpha)}{2}$

(B) $\frac{tg\,\alpha}{2} - \frac{\sin(2\alpha)}{4}$

(C) $tg\,\alpha - \frac{\sin(2\alpha)}{4}$

(D) $tg\,\alpha - \frac{\sin(2\alpha)}{2}$

2015, 1ª fase, grupo I

18. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3\sin^2(x)$

Qual das expressões seguintes define a função f'', segunda derivada de f?

(A) $6\sin(2x)\cos(x)$

(B) $6\sin(x)\cos(2x)$

(C) $6\cos(2x)$

(D) $6\sin(2x)$

2015, 2ª fase, grupo I