Exercícios de exames - Teoremas: Bolzano, Weiertrass e Lagrange

1. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

   Seja g a função, de domínio $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, definida por $g(x) = x\cos x + \sin x$

   Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\frac{1}{2}$

   2021, 1ª fase

2. Sejam f e g as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por $f(x) = x^2$ e $g(x) = \cos x$

   Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que a equação $f(x) = g(x)$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$.

   2020, 2ª fase

3. Para um certo número real k , seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{k-kx} & x < 1 \\ x^8 - 10 + 8\ln x & x \geq 1 \end{cases}$$

   Mostre, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]\sqrt{e}, e[$

   2020, Época especial

4. Seja f uma função diferenciável no intervalo $[0, 2]$ tal que:

- $f(0) = 1$
- $\forall x \in [0, 2], \quad 0 < f'(x) < 9$

O teorema de Lagrange, aplicado à função f em $[0, 2]$, permite concluir que:

(A) $0 < f(2) < 18$
(B) $1 < f(2) < 19$
(C) $2 < f(2) < 20$
(D) $3 < f(2) < 21$

2018, 1ª fase, caderno 1

5. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \frac{\ln x}{x}$

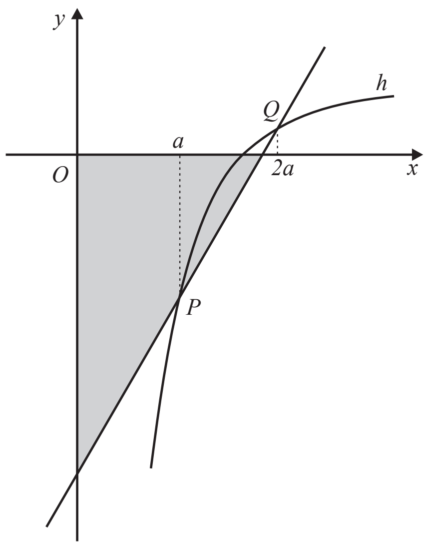

Figura 1

Para cada número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, sejam P e Q os pontos do gráfico da função h de abcissas a e $2a$, respetivamente.

Tal como a figura sugere, a reta PQ define, com os eixos coordenados, um triângulo retângulo.
Mostre que existe, pelo menos, um número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ para o qual esse triângulo é isósceles.

Sugestão: comece por identificar o valor do declive da reta PQ para o qual o triângulo é isósceles.

2018, 1ª fase, caderno 2

6. Seja g uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}$, tal que:

    - para todo o número real x, $(g\,o\,g)(x) = x$
    - para um certo número real a, tem-se $g(a) > a + 1$

    Mostre que a equação $g(x) = x + 1$ é possível no intervalo $]a, g(a)[$

    2016, 2ª fase, grupo II

7. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} & se\ \ x < \frac{1}{2} \\ (x+1)\ln x & se\ \ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Mostre que a equação $f(x) = 3$ é possível em $]1, e[$ e, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às centésimas.

Na sua resposta:

- recorra ao teorema de Bolzano para provar que a equação $f(x) = 3$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1, e[$

- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida.

2015, 1ªfase, grupo II

8. Um cubo encontra-se em movimento oscilatório provocado pela força elástica exercida por uma mola.

   A Figura 2 esquematiza esta situação. Nesta figura, os pontos O e A são pontos fixos. O ponto P representa o centro do cubo e desloca-se sobre a semirreta $\dot{O}A$

   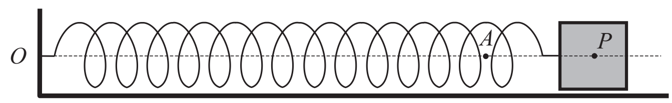

   Figura 2

   Admita que não existe qualquer resistência ao movimento.

   Sabe-se que a distância, em metros, do ponto P ao ponto O é dada por

   $$d(t) = 1 + \frac{1}{2}\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

   A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo ($t \in [0, +\infty[$).

   Justifique, recorrendo ao teorema de Bolzano, que houve, pelo menos, um instante, entre os três segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do ponto P ao ponto O foi igual a 1,1 metros.

2015, 2ªfase, grupo II