Exercícios de exames - Resolução de problemas utilizando a calculadora gráfica

1. Na Figura 1, está representado um cabo suspenso pelas suas extremidades em dois postes iguais, distanciados 10 metros entre si. Os postes estão instalados perpendicularmente ao solo, num terreno plano e horizontal. O ponto do cabo mais próximo do solo é equidistante dos dois postes.

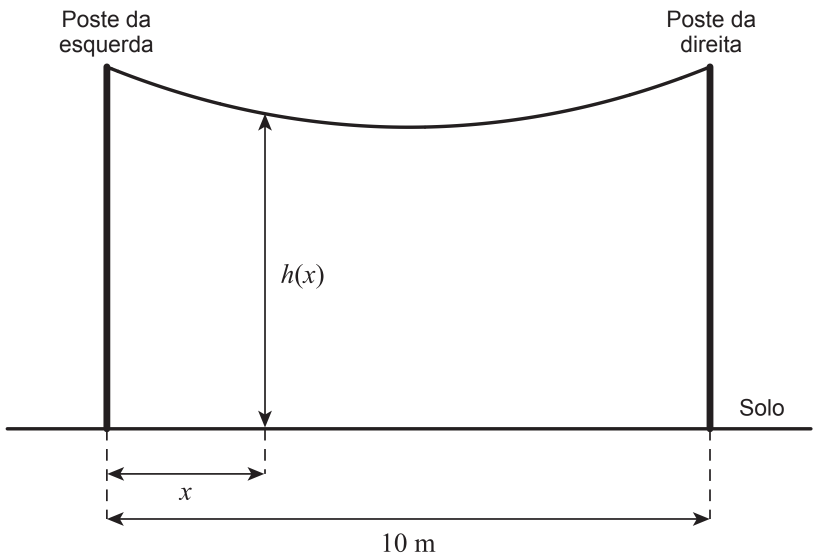

Figura 1

Seja h a função de domínio $[0,10]$, definida por $h(x) = 6,3\left(e^{\frac{x-5}{12,6}} + e^{\frac{5-x}{12,6}}\right)$-7,6

Admita que $h(x)$ é a altura, relativamente ao solo, em metros, de um ponto do cabo situado a x metros do poste da esquerda.

1.1. Qual é a distância, arredondada às décimas de metro, da base do poste da esquerda ao ponto do cabo que está mais próximo do solo?

(A) $7,1$m **(B)** $7,3$m **(C)** $7,6$m **(D)** $7,8$m

1.2. Para um ponto do cabo situado a d metros do poste da esquerda, verifica-se que, diminuindo 50% essa distância, a altura, relativamente ao solo, diminui 30 centímetros.

Determine, recorrendo à calculadora, o valor de d , sabendo-se que este valor existe e é único.

Apresente o resultado arredondado às décimas de metro.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às centésimas.

2022, 1ªfase

2. Um tanque, que inicialmente tinha um certo volume de água salgada, dispõe de duas torneiras, uma de enchimento e outra de vazamento. As duas torneiras são abertas, em simultâneo, sendo vertida água do mar para o tanque até este estar cheio.

   Admita que a massa de sal, m, em quilogramas, no tanque, t minutos após a abertura das torneiras, até o tanque estar cheio, é dada por

   $$m(t) = \frac{30(1+0{,}006t)^3-29}{(1+0{,}006t)^2}, \quad \text{com} \quad t \in [0, 250]$$

   2.1. Qual é, com aproximação às unidades, a percentagem de aumento da massa de sal no tanque, no primeiro minuto após a abertura das torneiras?

   (A) 152% **(B)** 52% **(C)** 250% **(D)** 25%

   2.2. Existe um instante a partir do qual, passada meia hora, a massa de sal no tanque triplica.

   Determine, recorrendo à calculadora, esse instante, sabendo-se que existe e é único.

Apresente o resultado em minutos e segundos (com os segundos arredondados às unidades).

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às centésimas.

2022, 2ªfase

3. Na Figura 2 , estão representadas, em referencial o.n. Oxy, parte do gráfico de uma função, h, e uma reta, s.

Sabe-se que:

- a função h, de domínio $\mathbb{R}$, é definida por $h(x) = x^2$;
- a reta s tem declive positivo, m, e intersecta o gráfico da função h nos pontos A e B;
- o ponto A tem coordenadas $(-1, 1)$.

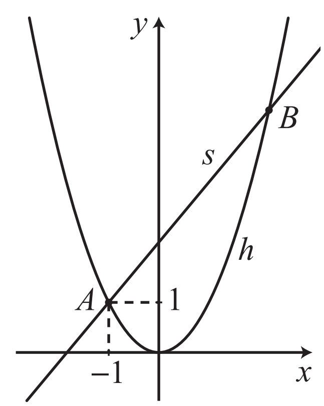

Figura 2

3.1. Qual das expressões seguintes representa a ordenada na origem da reta s?

(A) $m + 1$ **(B)** $m + 2$

(C) $(m + 1)^2$ **(D)** $(m + 2)^2$

3.2. Sabe-se que as coordenadas do ponto B são da forma $(m + 1, (m + 1)^2)$.

Considere o ponto C, projeção ortogonal do ponto B sobre o eixo Oy.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de m para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 4, sabendo-se que existe e é único.

Apresente o valor de m arredondado às centésimas.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita obter o valor de m;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às milésimas.

2022, Época especial

4. A Figura 3 representa um depósito de forma cilíndrica, instalado na horizontal, que contém uma certa quantidade de combustível.

Sabe-se que as bases do cilindro têm $1,8$ metros de diâmetro.

Num certo instante, iniciou-se o vazamento do depósito.

Seja $a(t)$ a altura, em metros, do combustível no depósito, t minutos após o início do vazamento.

Admita que $a(t) = 1,8 - (0,216 + 0,0039t)^{\frac{2}{3}}$

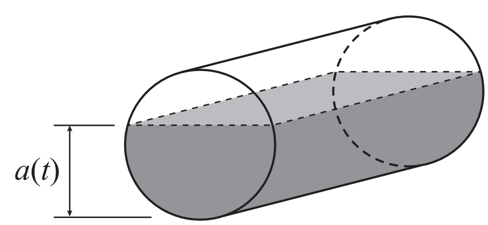

Figura 3

4.1. Qual é, em metros, a diferença entre a altura do combustível no depósito no início do vazamento e a altura do combustível quando este ocupa metade da capacidade do depósito?

(A) $0,72$ **(B)** $0,54$ **(C)** $0,36$ **(D)** $0,27$

4.2. Decorridos t_1 minutos após o início do vazamento, a altura do combustível no depósito é igual a um certo valor.

Sabe-se que, passado igual período de tempo, a altura do combustível no depósito é igual a metade desse valor.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t_1, sabendo que esse valor existe e é único.

Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2021, 1ªfase

5. Num laboratório cuja temperatura ambiente é constante, aqueceu-se uma substância até atingir uma certa temperatura, superior à temperatura ambiente, e, a seguir, deixou-se arrefecer essa substância durante uma hora.

   Admita que a temperatura dessa substância, em graus Celsius, t minutos após o início do arrefecimento, é dada por

$$T(t) = 20 + 100e^{-kt}, \quad 0 \leq t \leq 60$$

   em que k é uma constante real positiva.

   5.1. Durante o arrefecimento, houve um instante t_1 em que a temperatura da substância foi 30º.

   Qual é o valor de k?

(A) $\ln\left(\frac{10}{t_1}\right)$ **(B)** $t_1 - \ln 10$ **(C)** $\frac{\ln 10}{t_1}$ **(D)** $t_1 + \ln 10$

5.2. Considere $k = 0,04$

Sabe-se que, durante os primeiros t_2 minutos, a taxa média de variação da função T foi igual a $-2,4$

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t_2, sabendo que esse valor existe e é único.

Apresente o resultado em minutos e segundos (segundos arredondados às unidades). Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às milésimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2021, 2ªfase

6. Para conhecer a variação do número de bactérias de uma determinada estirpe, colocou-se num tubo de ensaio fechado, com alguns nutrientes, um certo número de bactérias dessa estirpe.

Admita que, nessas condições, o número, N, em milhares, de bactérias vivas existentes no tubo, t horas após a sua colocação nesse tubo, é dado por

$$N_t = N_0 e^{1,08t-0,3t^2}$$

em que N_0 representa a dimensão, em milhares, da população inicial.

6.1. Com o decorrer do tempo, para que tende o número de bactérias vivas existentes no tubo?

(A) $+\infty$ **(B)** $0,78N_0$ **(C)** N_0 **(D)** 0

6.2. Considere $N_0 = 1,63$

Num certo instante, t_1, havia, no tubo de ensaio, mais meio milhar de bactérias vivas do que uma hora antes desse instante.

Determine, recorrendo à calculadora, o valor de t_1 , sabendo que este valor existe e é único.

Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades). Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às milésimas.

2021, Época especial

7. O mecanismo de manivela-biela é composto por uma manivela de comprimento fixo, que efetua um movimento de rotação (sempre no mesmo sentido), e por uma biela, também de comprimento fixo, que transforma esse movimento de rotação no movimento alternado de translação de um pistão.

Na Figura 4, está representado esse mecanismo.

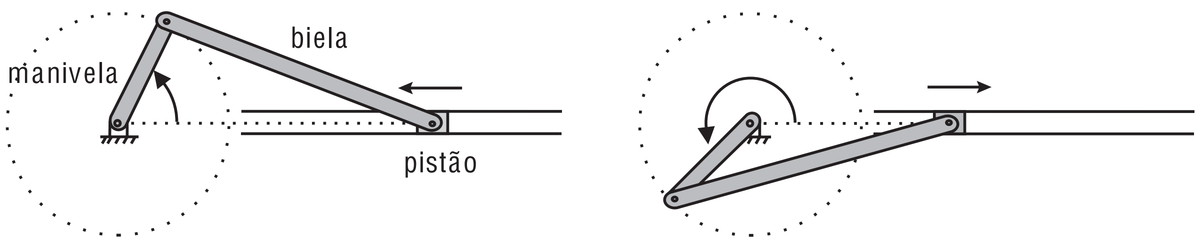

Figura 4

Na Figura 5, está representado um esquema do mecanismo descrito.
Relativamente a esta figura, sabe-se que:

- o ponto P representa o pistão;
- o segmento de reta $[OM]$ representa a manivela, que tem 1 cm de comprimento;
- o segmento de reta $[MP]$ representa a biela;
- os pontos A e B são os pontos em que a distância do pistão ao centro de rotação da manivela, O, é mínima e máxima, respetivamente;
- os pontos O, A, P e B são colineares.

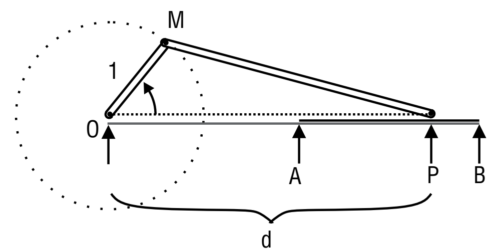

Figura 5

Sabe-se que o movimento de rotação da manivela se inicia quando o pistão se encontra na posição B e que a manivela descreve voltas completas a uma frequência angular constante. Admita que a função que dá, em centímetros, a distância do pistão ao ponto O, em função do tempo, t, em segundos, contado a partir do instante em que é iniciado o movimento, é dada por

$$d(t) = \cos t + \sqrt{9 - \sin^2 t}, \qquad t \geq 0$$

(o argumento das funções seno e cosseno está expresso em radianos)

7.1. Qual é, em centímetros, o comprimento da biela neste mecanismo?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5

7.2. Durante os primeiros cinco segundos, após o início do movimento, registou-se, num certo instante t_0 , a distância do pistão ao ponto O
Sabe-se que, dois segundos após esse instante, a distância do pistão ao ponto O diminuiu 25%.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a distância, em centímetros, arredondada às décimas, do pistão ao ponto O no instante t_0 , sabendo-se que este valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:
– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;
– apresente o valor pedido em centímetros, arredondado às décimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2020, 1ª fase

8. Os satélites artificiais são utilizados para diversos fins e a altitude a que são colocados depende do fim a que se destinam.

Admita que a Terra é uma esfera.

A Figura 6 apresenta um esquema em que se pode observar a superfície terrestre coberta por um satélite, quando este se encontra numa certa posição.

Nesta figura,

- R é o raio, em quilómetros, da Terra;
- h é a altitude, em quilómetros, do satélite ($h > 0$)
- r é o raio, em quilómetros, da base da calote esférica cuja superfície é coberta pelo satélite $0 < r < R$
- as grandezas h e r podem relacionar-se por meio da igualdade $r = \frac{R}{h+R}\sqrt{h^2 + 2hR}$

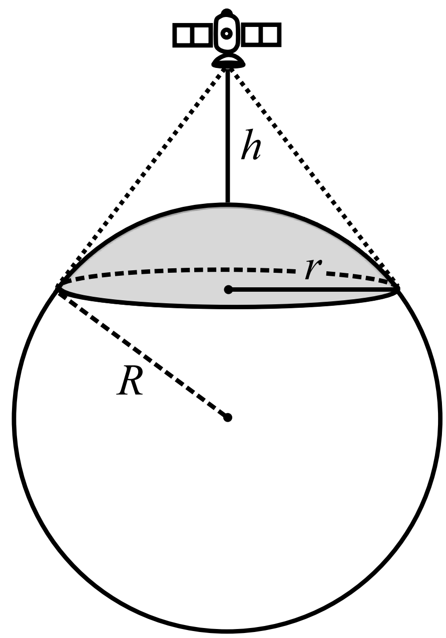

Figura 6

Sabe-se que, para cada posição do satélite, a percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo satélite é dada por $50\left(1 - \sqrt{1 - (\frac{r}{R})^2}\right)$

8.1. Qual é a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se o raio da base da calote esférica for igual a $\frac{3}{5}$ do raio da Terra?

(A) 20% **(B)** 15% **(C)** 10% **(D)** 5%

8.2. Considere que o raio da Terra é 6400 km

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se a altitude deste for igual ao raio da base da respetiva calote esférica.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;

– apresente o valor pedido arredondado às unidades.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2020, 2ª fase

9. Um município construiu, num dos seus parques, uma rampa de skate entre duas paredes verticais distanciadas 21 metros uma da outra.

   Na Figura 7, estão representados um corte longitudinal da rampa e dois jovens, cada um no seu skate.

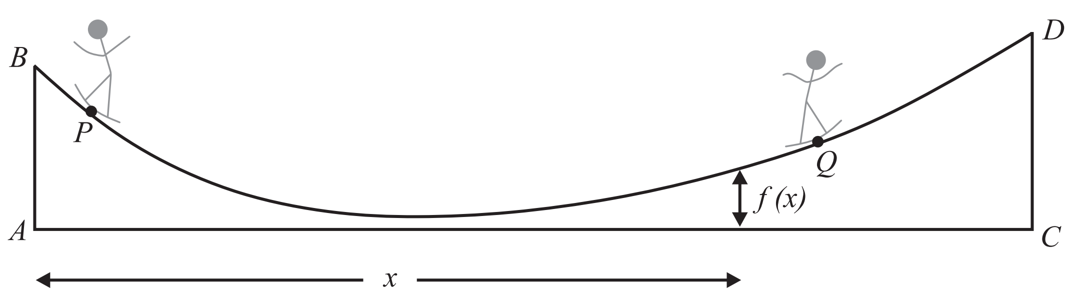

Figura 7

Nesta figura, o arco BD representa a rampa, os segmentos de reta $[AB]$ e $[CD]$ representam as paredes e o segmento de reta $[AC]$ representa o solo.

Os pontos P e Q representam as posições dos dois jovens na rampa.

Admita que a distância ao solo, em metros, de um ponto da rampa situado x metros à direita da parede representada na figura por $[AB9$ é dada por

$$f(x) = 0,0001x^4 - 0,005x^3 + 0,11x^2 - x + 3,4, \qquad 0 \leq x \leq 21$$

9.1. Qual é,em metros, com arredondamento às décimas, o valor absoluto da diferença entre as alturas das duas paredes da rampa de skate?

(A) $0,8$

(B) $0,7$

(C) $0,5$

(D) $0,4$

9.2. Num certo instante, os dois jovens estão à mesma distância do solo, um mais próximo da parede representada por $[AB]$ e o outro mais próximo da parede representada por $[CD]$. O jovem que se encontra mais próximo da parede representada por $[AB]$ está a um metro desta parede.

Seja d a distância a que se encontra da parede representada por $[CD]$ o jovem que dela está mais próximo.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de d, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;

– apresente o valor de d em metros, arredondado às décimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2020, Época especial

10. Uma lente de contacto é um meio transparente limitado por duas faces, sendo cada uma delas parte de uma superfície esférica. Na Figura 8, pode observar-se uma lente de contacto.

Na Figura 9, está representado um corte longitudinal de duas superfícies esféricas, uma de centro C_1 e raio r_1 e outra de centro C_2 e raio r_2, com $r_2 > r_1$, que servem de base à construção de uma lente de contacto, representada a sombreado na figura.

Seja $x = \overline{C_1C_2}$

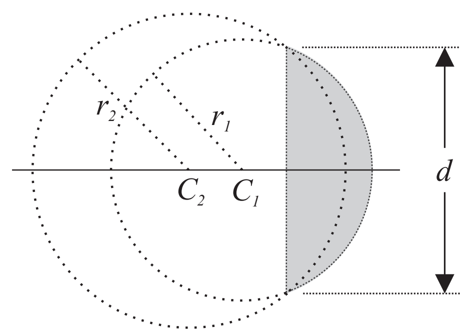

Figura 9

Figura 8

Sabe-se que o diâmetro, d, da lente é dado por

$$\frac{\sqrt{\left[(r_1+r_2)^2-x^2\right]\left[x^2-(r_1-r_2)^2\right]}}{x}, \quad \text{com} \quad r_2 - r_1 < x < \sqrt{r_2^2 - r_1^2}$$

Uma lente de contacto foi obtida a partir de duas superfícies esféricas com 7 mm e 8 mm de raio, respetivamente.

O diâmetro dessa lente excede em 9 mm a distância, x, entre os centros das duas superfícies esféricas.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de x, sabendo-se que esse valor é único no intervalo $\left]r_2 - r_1, \sqrt{r_2^2 - r_1^2}\right[$
Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:
- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido em milímetros, arredondado às décimas.

2019, 1ª fase, caderno 1

11. O nível, N, de um som, medido em decibéis, é função da sua intensidade, I, medida em microwatt por metro quadrado ($\mu\, W/m^2$), de acordo com a igualdade

$$N = 60 + 10 \log_{10} I \quad \text{com } I > 0$$

Relativamente ao som de um certo despertador, sabe-se que, aumentando a sua intensidade em $150\,\mu\, W/m^2$, o seu nível passa a ser $1,4\,\%$ do quadrado do nível inicial.
Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor da intensidade inicial do som desse despertador, sabendo-se que pertence ao intervalo $[20, 80]$ e que, neste intervalo, esse valor é único.
Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta: – apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
– reproduza o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) obter o valor pedido;

– apresente esse valor em $\mu\, W/m^2$, arredondado às unidades.

2019, 2ª fase, caderno 1

12. Na Figura 10, estão representadas, em referencial o.n. xOy,

- parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$
- parte do gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{\ln x}{x}$

Considere que um ponto A se desloca no primeiro quadrante sobre o gráfico da função g.
Para cada posição do ponto A, seja B o ponto do gráfico da função f cuja abcissa é igual à do ponto A.
Seja a $(a > 1)$ a abcissa comum dos pontos A e B
Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de a para o qual a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 5, sabendo-se que esse valor existe e é único.

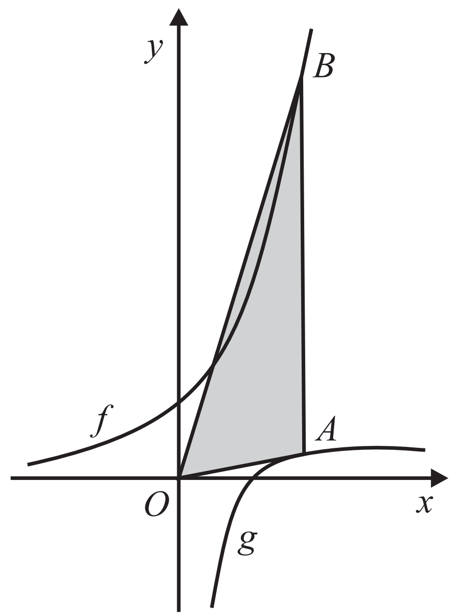

Figura 10

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:
– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
– apresente o valor de a arredondado às décimas.

2019, Época especial, caderno 1

13. Um feixe de luz incide perpendicularmente sobre um conjunto de três placas sobrepostas, homogéneas e iguais, feitas de um material transparente. A Figura 11 ilustra a situação.

Admita que a potência, L, da luz transmitida, após atravessar o conjunto de placas, é dada por

$$L = I(1-R)^6 e^{-3\lambda}$$

em que:

- I é a potência da luz incidente;
- R é o coeficiente de reflexão do material ($0 < R < 1$)
- λ é o coeficiente de absorção do material, por centímetro ($\lambda > 0$)

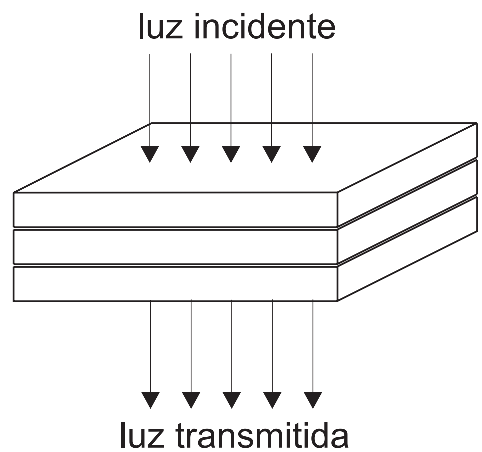

Figura 11

Relativamente ao material de que as placas são feitas, sabe-se que o coeficiente de reflexão, R, e o coeficiente de absorção, λ, têm o mesmo valor numérico.

Sabe-se ainda que a potência da luz transmitida é igual a metade da potência da luz incidente.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor comum dos coeficientes de absorção e de reflexão do material, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

– equacione o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;

– apresente o valor pedido arredondado às milésimas.

2018, 1ª fase, caderno 1

14. O planeta Mercúrio descreve uma órbita elíptica em torno do Sol. Na Figura 12, está representado um esquema de uma parte dessa órbita. Relativamente a esta figura,

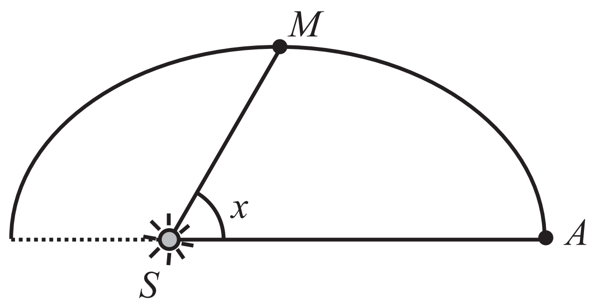

Figura 12

tem-se que:

- o ponto S representa o Sol;
- o ponto M representa o planeta Mercúrio;
- o ponto A representa o afélio, que é o ponto da órbita mais afastado do Sol;
- x é a amplitude do ângulo ASM, compreendida entre 0 e 180 graus.

Admita que a distância, d, em milhões de quilómetros, do planeta Mercúrio ao Sol é dada, em função de x, por

$$d = \frac{555}{10-2{,}06\cos x}$$

Seja α a amplitude do ângulo ASM, num certo instante (α está compreendido entre 0 e 20 graus). Nesse instante, o planeta Mercúrio encontra-se a uma certa distância do Sol.

Passado algum tempo, a amplitude do ângulo ASM é três vezes maior e a distância do planeta Mercúrio ao Sol diminuiu 3%.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de α, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

– equacione o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;

– apresente o valor de α em graus, arredondado às unidades.

2018, 2ª fase, caderno 1

15. Na cidade de Saint Louis, nos Estados Unidos, existe um monumento em forma de arco conhecido como Portal do Oeste. No ponto mais elevado desse arco, encontra-se um miradouro ao qual se acede por um ascensor.

A Figura 13 é uma fotografia dessa estrutura e a Figura 14 representa um esquema do arco.

Figura 13

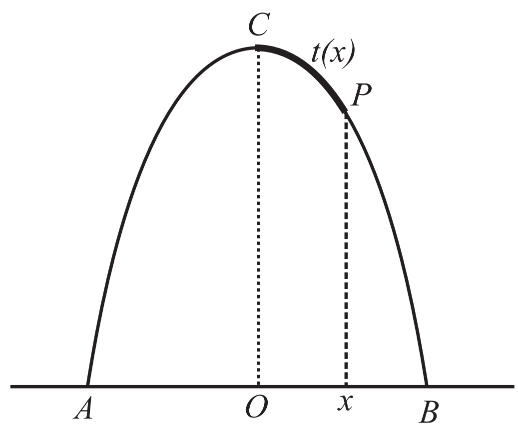

Figura 14

Relativamente à Figura 14, sabe-se que:

- os pontos A e B representam a intersecção do arco com o solo;
- o ponto O é o ponto médio de $[AB]$
- o ponto C representa o miradouro, e a reta OC é um eixo de simetria do arco.

Considere a reta AB como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e em que uma unidade corresponde a um metro.

Admita que o ascensor se está a deslocar no arco CB, do miradouro C para o ponto B

Para cada ponto P, de abcissa x, situado no arco CB, o tempo que o ascensor demora a percorrer o arco CP é dado, em minutos, por

$$t(x) = 0,34\left(e^{0,0257x} - e^{-0,0257x}\right), \quad \text{com } x \in [0, 96]$$

Num certo instante, o ascensor encontra-se num ponto F (não coincidente com o ponto C), a uma certa distância da reta OC. Passado algum tempo, o ascensor encontra-se num ponto G

A Figura 15 ilustra a situação.
Sabe-se que:

- a distância do ponto G à reta OC é igual ao triplo da distância do ponto F à mesma reta;
- o tempo que o ascensor demora a percorrer o arco que vai de F até G é igual ao triplo do tempo que demora a percorrer o arco que vai de C até F

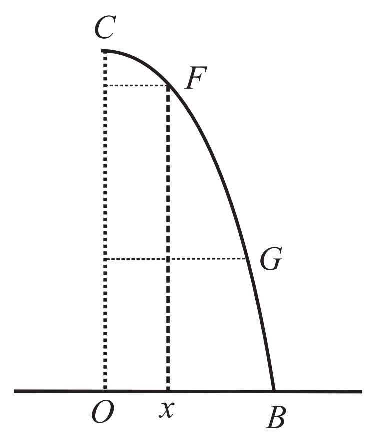

Figura 15

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a distância, x, em metros, do ponto F à reta OC

Na sua resposta:

– equacione o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;

– apresente o valor da distância pedida arredondado às décimas.

2018, Época especial, caderno 1

16. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} & se \ x < 1 \\ 2 & se \ x = 1 \\ 3 + \frac{\sin(x-1)}{1-x} & se \ x > 1 \end{cases}$$

Na Figura 16, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g e um triângulo $[OAP]$

Sabe-se que:

- o ponto A é o ponto de abcissa negativa que é a intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas;
- o ponto P é um ponto do gráfico da função g, de abcissa e ordenada negativas;
- a área do triângulo $[OAP]$ é igual a 5

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto P
Apresente o valor obtido arredondado às décimas.

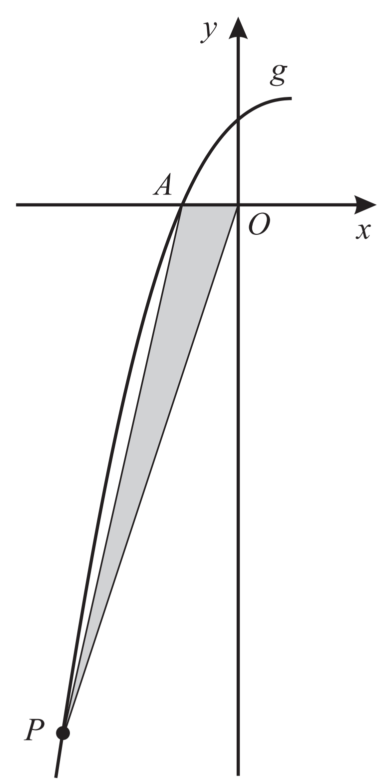

Figura 16

Na sua resposta:
– determine analiticamente a abcissa do ponto A
– equacione o problema;
– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação.

2017, 1ª fase, grupo II

17. Num jardim, uma criança está a andar num baloiço cuja cadeira está suspensa por duas hastes rígidas. Atrás do baloiço, há um muro que limita esse jardim.

A Figura 17 esquematiza a situação. O ponto P representa a posição da cadeira.

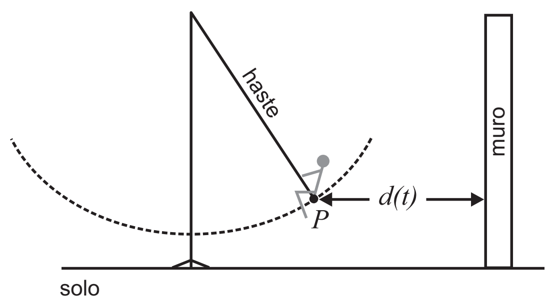

Figura 17

Num determinado instante, em que a criança está a dar balanço, é iniciada a contagem do tempo. Doze segundos após esse instante, a criança deixa de dar balanço e procura parar o baloiço arrastando os pés no chão.

Admita que a distância, em decímetros, do ponto P ao muro, t segundos após o instante inicial, é dada por

$$d(t) = \begin{cases} 30 + t\sin(\pi t) & se \ \ 0 \leq t < 12 \\ 30 + 12\, e^{12-t} \sin(\pi t) & se \ \ t \geq 12 \end{cases}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos)

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o número de soluções da equação $d(t) = 27$ no intervalo $[0, 6]$, e interprete o resultado no contexto da situação descrita

Na sua resposta, reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema.

2017, 2ª fase, grupo II

18. Seja f a função, de domínio $]1-\pi, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-2}{\sin(x-1)} & se \ 1-\pi < x < 1 \\ 2 & se \ x = 1 \\ e^{-2x+4} + \ln(x-1) & se \ x > 1 \end{cases}$$

O gráfico da função f tem um único ponto de inflexão, cuja abcissa pertence ao intervalo $]1, 2[$

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa desse ponto.

Na sua resposta:

• reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema;

• apresente a abcissa do ponto de inflexão arredondada às centésimas.

2017, Época especial, grupo II

19. Num dia de vento, são observadas oscilações no tabuleiro de uma ponte suspensa, construída sobre um vale.

Mediu-se a oscilação do tabuleiro da ponte durante um minuto.

Admita que, durante esse minuto, a distância de um ponto P do tabuleiro a um ponto fixo do vale é dada, em metros, por

$$h(t) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t) + t\sin(2\pi t) \quad \big(t \text{ é medido em minutos e pertence a } [0,1]\big)$$

Em $[0,1]$, o conjunto solução da inequação $h(t) < 19,5$ é um intervalo da forma $]a, b[$

Determine o valor de $b-a$ arredondado às centésimas, recorrendo à calculadora gráfica, e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita.

Na sua resposta:

– reproduza o gráfico da função h visualizado na calculadora (sugere-se que, na janela de visualização, considere $y \in [19, 21]$);

– apresente o valor de a e o valor de b arredondados às milésimas;

– apresente o valor de $b - a$ arredondado às centésimas;

– interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.

2016, 1ª fase, grupo II

20. Seja f a função, de domínio $]-\frac{\pi}{2}, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2+\sin x}{\cos x} & se \ -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ x - \ln x & se \ x > 0 \end{cases}$$

Seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$

Além do ponto de tangência, a reta r intersecta o gráfico de f em mais dois pontos, A e B, cujas abcissas pertencem ao intervalo $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ (considere que o ponto A é o de menor abcissa).

Determine analiticamente a equação reduzida da reta r e, utilizando a calculadora gráfica, obtenha as abcissas dos pontos A e B

Apresente essas abcissas arredondadas às centésimas.

Na sua resposta, reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver o problema.

2016, 2ª fase, grupo II

21. Seja f a função, de domínio $]-\frac{3\pi}{2}, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \cos x & se \ -\frac{3\pi}{2} < x < 0 \\ \ln(e^x + x) & se \ x \geq 0 \end{cases}$$

Na Figura 18, estão representados:

- parte do gráfico da função f
- um ponto A, pertencente ao gráfico de f de abcissa a
- a reta t, tangente ao gráfico da função f no ponto A

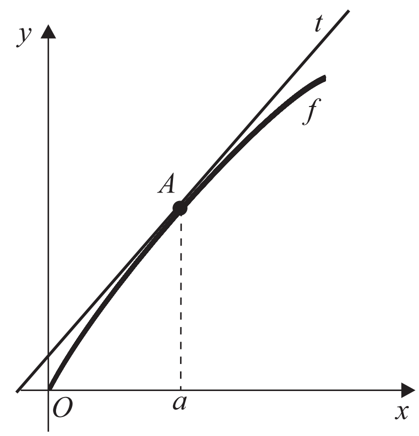

Figura 18

Sabe-se que:

- $a \in]0, 1[$
- a reta t tem declive igual a $1, 1$

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto A

Na sua resposta:

— equacione o problema;

— reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, que lhe permite(m) resolver a equação;

— apresente a abcissa do ponto A arredondada às centésimas.

2016, Época especial, grupo II

22. Na Figura 19, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[NOPQRSTUV]$ que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- o vértice P pertence ao eixo Ox
- o vértice N pertence ao eixo Oy
- o vértice T pertence ao eixo Oz
- o vértice R tem coordenadas $(2, 2, 2)$
- o plano PQV é definido pela equação $6x + z - 12 = 0$

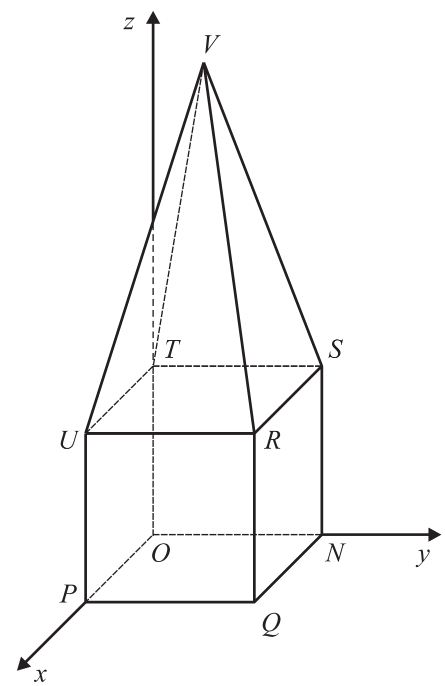

Figura 19

Seja A um ponto pertencente ao plano QRS

Sabe-se que:

- o ponto A tem cota igual ao cubo da abcissa;
- os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$ são perpendiculares.

Determine a abcissa do ponto A, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta:

- equacione o problema
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver a equação, devidamente identificado(s) (sugere-se a utilização da janela de visualização em que $x \in [-4, 4]$ e $y \in [-2, 7]$)
- apresente a abcissa do ponto A arredondada às centésimas.

2015, 2ª fase, grupo II

23. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^2e^{1-x}$

Considere, num referencial o.n. xOy, três pontos, A, B e C, tais que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico da função f
- a abcissa do ponto B é maior do que a abcissa do ponto A
- os pontos A e B têm a mesma ordenada, a qual é igual a $1,2$
- o ponto C pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual à do ponto B

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a área do quadrilátero $[OABC]$, sendo O a origem do referencial.

Na sua resposta:

– reproduza, num referencial, o gráfico da função f no intervalo $[0, 5]$

– apresente o desenho do quadrilátero $[OABC]$

– indique as abcissas dos pontos A e B arredondadas às milésimas;

– apresente a área do quadrilátero arredondada às centésimas.

2015, Época especial, grupo II