Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2022

1.

1.1. A base $[GHIJKL]$ do prisma hexagonal é perpendicular ao eixo Oz, ou seja a equação do plano que contem esta base é da forma:

$$z = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Sabendo que o centro do prisma tem cota igual a 2 então a cota de todos os pontos pertencentes ao plano que define a base $[GHIJKL]$ do prisma hexagonal têm cota igual ao dobro de dois.

Assim vem que a equação que define o plano que contém a face $[GHIJKL]$ do prisma é $z = 4$.

Opção(B)

1.2. O vetor normal ao plano BCJ tem coordenadas $(3, -\sqrt{3}, 0)$ e é também um vetor normal ao plano LEF.

A equação do plano LEF é da forma:

$$-3x - \sqrt{3}y + d = 0$$

Pela observação da figura sabemos que plano CFG corta o prisma em duas metades iguais por isso o ponto M, o centro do prisma, pertence a este plano.

O ponto F pertence ao eixo Oy e a sua ordenada é igual à ordenada do ponto M, assim F tem coordenadas $\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$.

Como o ponto F pertence ao plano LEF, substituindo as coordenadas do ponto F na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$-3x - \sqrt{3}y + d = 0 \;\Leftrightarrow\; -3 \times 0 - \sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} + d = 0 \;\Leftrightarrow\; d = 2$$

Uma equação do plano LEF é: $-3x - \sqrt{3}y + 2 = 0$.

2. A área da semi-circunferência é igual a:

$$A_{semi-circunferência} = \frac{\pi \times r^2}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$$

O triangulo [ABC] é retângulo em B porque $A\hat{B}C$ é um ângulo inscrito de arco $\overset{\frown}{AC}$ logo $A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = 90^o$.

Aplicando a razão trigonométrica do cosseno no triângulo retângulo $[ABC]$ conseguimos determinar uma expressão de $[BA]$:

$\cos\alpha = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{BA}}{4} \Leftrightarrow \overline{BA} = 4\cos\alpha$

Aplicando a razão trigonométrica do seno no triângulo retângulo $[ABC]$ conseguimos determinar uma expressão de $[PC]$:

$\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{4} \Leftrightarrow \overline{BC} = 4\sin\alpha$

Calculando a área do triângulo [ABC]:

$$A_{[ABC]} = \frac{b \times h}{2} = \frac{\overline{BA} \times \overline{BC}}{2} = \frac{4\cos\alpha \times 4\sin\alpha}{2} = 2\cos\alpha \times 4\sin\alpha = 4\sin(2\alpha)$$

A área da região sombreada é igual a:

$$A_{região\ sombreada} = A_{semi-circunferência} - A_{[ABC]} = 2\pi - 4\sin(2\alpha)$$

3. Vamos considerar todos os números naturais de cinco algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos de 0 a 5 (ao todo 6 algarismos) em que o algarismo das unidades igual a 5.

Na última posição fica o algarismo 5 ou seja só temos 1 hipótese de escolha.

$\_ \times \_ \times \_ \times \_ \times \underline{1}$

Na primeira posição não pode estar o algarismo 0 nem o 5 que já colocámos na última posição logo temos 4 hipóteses de escolha (1,2,3 e 4) para o algarismo da primeira posição.

$\underline{4} \times \_ \times \_ \times \_ \times \underline{1}$

Na segunda posição pode estar o algarismo 0 ou qualquer algarismo que não seja o 5 e o que já colocámos na primeira posição logo temos 4 hipóteses de escolha para o algarismo da segunda posição.

$\underline{4} \times \underline{4} \times \_\_ \times \_\_ \times \underline{1}$

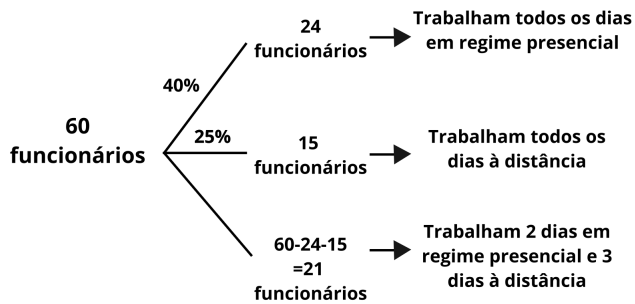
Nas restantes posições pode ficar qualquer outro dos três algarismos que sobram de forma a não serem repetidos.

$\underline{4} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 96$

Assim existem 96 números naturais de cinco algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos de 0 a 5 em que o algarismo das unidades igual a 5.

Opção(D)

4. A situação descrita no enunciado pode ser representada através do seguinte esquema:



A probabilidade de serem selecionados, no máximo, três funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana é igual ao contrário da probabilidade de selecionar quatro funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana.

Assim sendo o número de casos favoráveis é igual ao contrário de selecionar quatro funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana. Temos ao todo 24+21=45 funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana, assim o número de casos favoráveis é igual a ${}^{60}C_4 - {}^{45}C_4$.

O número de casos possíveis é igual ao número de grupos que é possível formar ao selecionar quatro funcionários, ao acaso, dos sessenta funcionários, isto é, ${}^{60}C_4$.

Usando a Regra de Laplace que dita que a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, a probabilidade de serem selecionados, no máximo, três funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana é:

$$\frac{nr\ de\ casos\ favoráveis}{nr\ de\ casos\ \ possíveis} = \frac{{}^{60}C_4 - {}^{45}C_4}{{}^{60}C_4}$$

5. $P(B)+P(A)\times\big(1-P(B|A)\big)=P(B)+P(A)\times\left(1-\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\right)_{(*_1)}=$

$=P(B)+P(A)\times\left(1-\frac{P(B)\times P(A)}{P(A)}\right)_{(*_2)}=P(B)+P(A)\times\big(1-P(B)\big)=$

$=P(B)+P(A)-P(A)\times P(B)=P(B)\big(1-P(A)\big)+P(A)=P(B)\times P(\overline{A})_{(*_3)}+P(A)=$

$=P(A)+P(B)\times P(\overline{A})$

$(*_1)$ $P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$ Definição de probabilidade condicionada

$(*_2)$ $P(B\cap A)=P(B)\times P(A)$ porque A e B são acontecimentos independentes

$(*_2)$ $1-P(A)=P(\overline{A})$ porque A e $\overline{A}$ são acontecimentos contrários

6. $\lim u_n=\lim\left(\frac{n+k}{n}\right)^n=\lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k$ (Limite notável)

Opção(C)

7. A expressão do termo geral de uma progressão aritmética é da forma:

$$v_n=v_1+(n-1)r$$

Sabemos que:

$v_3=v_1+2r$ e $v_3=1$ logo vem que $1=v_1+2r$

$v_9=v_1+8r$, $v_{10}=v_1+9r$ e $v_{10}=\frac{5}{4}v_9$ logo vem que $v_1+9r=\frac{5}{4}(v_1+8r)$

$v_1+9r=\frac{5}{4}(v_1+8r)\Leftrightarrow 4v_1+36r=5v_1+40r\Leftrightarrow v_1=-4r$

Resolvendo o sistema abaixo conseguimos determinar o primeiro termo e a razão desta progressão:

$$\begin{cases}1=v_1+2r\\ v_1=-4r\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1=-4r+2r\\ \underline{\qquad\qquad}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=-\frac{1}{2}\\ \underline{\qquad\qquad}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=-\frac{1}{2}\\ v_1=2\end{cases}$$

O termo geral desta progressão é igual a:

$$v_n=2-\frac{1}{2}(n-1)=2-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}-\frac{n}{2}=\frac{5-n}{2}$$

Vamos averiguar se -50 é termo da progressão (v_n):

$-50 = \frac{5-n}{2} \Leftrightarrow -100 = 5 - n \Leftrightarrow n = 105$

Concluímos que -50 é termo da progressão (v_n) de ordem 105.

8. O número complexo z já está na forma trigonométrica logo sabemos o seu módulo e o ser argumento:

$$|z| = e \quad \wedge \quad arg(z) = e.$$

Como $e \approx 2,7$ e $\pi \approx 3,14$ então $\frac{\pi}{2} < arg(z) < \pi$

Opção(A)

9. Vamos escrever o número complexo z_1 na forma algébrica:

$z_1 = (1+i)^2 \times (2+i) + i^7 = (1+2i+i^2) \times (2+i) + i^3 = 2i(2+i) - i = 4i + 2i^2 - i = -2+3i$

Calculando z_2 na forma algébrica:

$z_1 \times z_2 = 3 + 2i \Leftrightarrow (-2+3i) \times z_2 = 3 + 2i \Leftrightarrow z_2 = \frac{3+2i}{-2+3i} \Leftrightarrow z_2 = \frac{(3+2i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_2 = \frac{-6-9i-4i-6i^2}{4+9} \Leftrightarrow z_2 = \frac{-13i}{13} \Leftrightarrow z_2 = -i$

Logo vem que $\sin\theta + i\cos\theta = -i \ \wedge \ \theta \in [0, 2\pi[\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\theta = 0 \ \wedge \ \cos\theta = -1 \ \wedge \ \theta \in [0, 2\pi[\ \Leftrightarrow \theta = \pi$

10. Calculando o valor da função f no ponto $x = 0$:

$f(0) = \frac{3}{5}$

Calculando o valor dos limites laterais da função f quando $x \to 0$:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{e^{5x}-1} = 3 \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{e^{5x}-1} = 3 \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\frac{e^{5x}-1}{x}} = 3 \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{5\frac{e^{5x}-1}{5x}} = \frac{3}{5} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\frac{e^{5x}-1}{5x}} = (*_4)$

Fazendo a mudança de variável: $y = 5x \quad (y \to 0$ quando $x \to 0)$

$(*_4)$ $\frac{3}{5}\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{\frac{e^y-1}{y}} = \frac{3}{5}\times\frac{1}{1} = \frac{3}{5}$ (Limite notável)

Como $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, então a função f é contínua em $x = 0$.

11.

11.1. Vamos começar por determinar a equação da assíntota oblíqua ao gráfico de g quando x tende para $+\infty$:

$m = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)-x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x} - \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x} - 1 = \frac{\ln(1+e^{-\infty})}{-\infty} - 1 = \frac{\ln(1+0^+)}{-\infty} - 1 = -1$

$b = \lim\limits_{x\to-\infty}\big(g(x)-mx\big) = \lim\limits_{x\to-\infty}\big(\ln(1+e^x)-x+x\big) = \lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+e^x) =$

$= \ln(1+e^{-\infty}) = \ln(1+0^+) = \ln 1 = 0$

Concluímos que a reta definida por $y = -x$ é assíntota oblíqua do gráfico de g quando $x\to-\infty$.

Vamos calcular a assíntota horizontal ao gráfico de g, quando x tende para $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\big(\ln(1+e^x)-x\big) = \lim\limits_{x\to+\infty} = \big(\ln(1+e^x)-\ln e^x\big) = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{+\infty}}+1\right) = \ln 1 = 0$

Concluímos que a reta definida por $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de g quando $x\to+\infty$.

11.2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g:

$$g'(x) = \big(\ln(1+e^x)-x\big)' = \frac{e^x}{1+e^x} - 1$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 0 é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$m = g'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} - 1 = -\frac{1}{2}$

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 0 é da forma:

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto $(0, g(0))$ (que pertence à reta) na equação da reta tangente, conseguimos determinar a constante b:

$y = -\frac{1}{2}x + b \;\Leftrightarrow\; g(0) = -\frac{e^2}{4} \times 0 + b \;\Leftrightarrow\; \ln(1 + e^0) - 0 = +b \;\Leftrightarrow b = \ln 2$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 0 é:

$$y = -\frac{1}{2}x + \ln 2$$

Sabendo que A é o ponto de intersecção da reta r com os eixo Oy então as suas coordenadas são da forma $A(0, g(0))$.

Como $g(0) = \ln 2$ então as coordenadas do ponto A são $(0, \ln 2)$.

O ponto B é o ponto de intersecção da reta r com os eixo Ox então as suas coordenadas são da forma $B(x_b, 0)$.

Como $0 = -\frac{1}{2}x_b + \ln 2 \Leftrightarrow x_b = -2\ln 2$ então as coordenadas do ponto B são $(-2\ln 2, 0)$.

A área do triângulo $[OAB]$ é igual a:

$$A_{[AOB]} = \frac{b \times h}{2} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{\ln 2 \times 2\ln 2}{2} = (\ln 2)^2$$

12.

12.1. A equação da reta s é da forma:

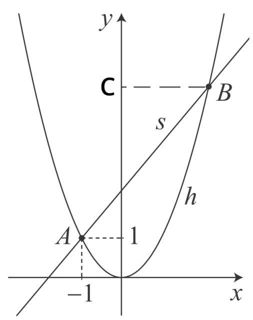
$$y = mx + b$$

Substituindo o ponto A na equação da reta s conseguimos escrever a constante b em função do declive m:

$$y = mx + b \Leftrightarrow 1 = m \times (-1) + b \Leftrightarrow b = 1 + m$$

Opção(A)

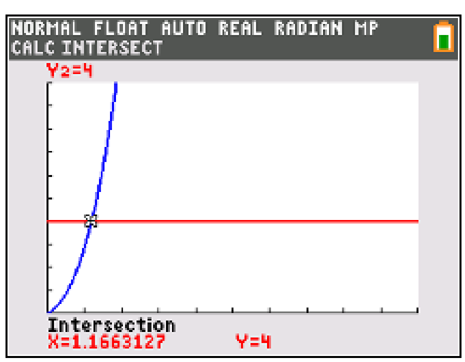
12.2. Considerando o ponto C, projeção ortogonal do ponto B sobre o eixo Oy:



Sabendo que a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 4, vem que:

$$A_{[ABC]} = \frac{b \times h}{2} \Leftrightarrow \frac{x_b \times (y_B - y_A)}{2} = 4 \Leftrightarrow \frac{(m+1)\left((m+1)^2 - 1\right)}{2} = 4$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, conseguimos determinar a constante m:



O valor de m arredondado às centésimas, é igual a 1,17.

13. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função g:

$$g''(x) = \left(\frac{x-e^{3x}}{x}\right)' = \frac{(1-3e^{3x})x-(x-e^{3x})}{x^2} = \frac{x-3xe^{3x}-x+e^{3x}}{x^2} = \frac{e^{3x}(-3x+1)}{x^2}$$

Os pontos de inflexão de g correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{3x}(-3x+1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow e^{3x}(-3x+1) = 0 \ \wedge \ x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{3x} = 0_{\,cond.impossível} \ \vee \ -3x+1 = 0 \ \wedge \ x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \ \wedge \ x \neq 0$

$g''(\frac{1}{4}) = \frac{e^{3\times\frac{1}{4}}\left(-3\times\frac{1}{4}+1\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} > 0$

$g''(1) = \frac{e^{3\times1}(-3\times1+1)}{1^2} < 0$

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

	0		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$g''(x)$	n.d.	+	0	-
$g(x)$	n.d.	$\smile$	P.I.	$\frown$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0, \frac{1}{3}\right]$.

A abcissa do ponto de inflexão do gráfico de g é $\frac{1}{3}$.

14. $\frac{1}{2}\log_2(9x+1) = \log_2(6x) \ \wedge \ 9x+1 > 0 \ \wedge \ 6x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2\sqrt{9x+1} = \log_2(6x) \ \wedge \ x > -\frac{1}{9} \ \wedge \ x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sqrt{9x+1})^2 = (6x)^2 \ \wedge \ x > 0 \Leftrightarrow 9x+1 = 36x^2 \ \wedge \ x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -36x^2 + 9x + 1 = 0 \ \wedge \ x > 0$

$a = -36 \qquad b = 9 \qquad c = 1$

Usando a fórmula resolvente temos:

$x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm\sqrt{9^2-4\times(-36)\times 1}}{2\times(-36)} \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm\sqrt{81+144}}{-72} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{-9+15}{-72} \vee x = \frac{-9-15}{-72} \Leftrightarrow x = -\frac{6}{72} \vee x = \frac{24}{72} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{12} \vee x = \frac{1}{3}$

Como $x > 0 \quad C.S. = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

15. Para determinarmos o contradomínio da função f de domínio $]0, +\infty[$ temos de estudar a sua monotonia.

Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f:

$$f'(x) = \left(\sqrt{kx} - \ln(kx)\right)' = \frac{k}{2\sqrt{kx}} - \frac{k}{kx}$$

Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{2\sqrt{kx}} - \frac{k}{kx} = 0 \ \wedge \ 2\sqrt{kx} \neq 0 \ \wedge \ kx \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{k}{2\sqrt{kx}} = \frac{k}{kx} \ \wedge \ x \neq 0_{\,cond.universal} \Leftrightarrow k^2x = 2k\sqrt{kx} \Leftrightarrow k^2x = \sqrt{4k^2kx} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (k^2x)^2 = (\sqrt{4k^2kx})^2 \Leftrightarrow k^4x^2 = 4k^3x \Leftrightarrow k^4x^2 - 4k^3x = 0 \Leftrightarrow x(k^4x - 4k^3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0_{\,cond.impossível} \ \vee \ k^4x - 4k^3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4k^3}{k^4} \Leftrightarrow x = \frac{4}{k}$

Logo, $f'(x)$ tem um zero em $x = \frac{4}{k}$.

$f'\left(\frac{4}{k+1}\right) = \frac{k}{2\sqrt{k\times\frac{4}{k+1}}} - \frac{k}{k\times\frac{4}{k+1}} = \frac{k}{2\sqrt{\frac{4k}{k+1}}} - \frac{k}{\frac{4k}{k+1}} = \frac{k}{\sqrt{\frac{16k}{k+1}}} - \frac{(k+1)k}{4k} = \sqrt{\frac{k^2}{\frac{16k}{k+1}}} - \frac{k+1}{4} =$
$= \sqrt{\frac{(k+1)k^2}{16k}} - \frac{k+1}{4} = \sqrt{\frac{(k+1)k}{16}} - \frac{k+1}{4} = \frac{\sqrt{(k+1)k}}{4} - \frac{k+1}{4} < 0, \quad \forall\, k > 0$

$f'\left(\frac{4}{k-1}\right) = \frac{k}{2\sqrt{k\times\frac{4}{k-1}}} - \frac{k}{k\times\frac{4}{k-1}} = \frac{k}{2\sqrt{\frac{4k}{k-1}}} - \frac{k}{\frac{4k}{k-1}} = \frac{k}{\sqrt{\frac{16k}{k-1}}} - \frac{(k-1)k}{4k} = \sqrt{\frac{k^2}{\frac{16k}{k-1}}} - \frac{k-1}{4} =$
$= \sqrt{\frac{(k-1)k^2}{16k}} - \frac{k-1}{4} = \sqrt{\frac{(k-1)k}{16}} - \frac{k-1}{4} = \frac{\sqrt{(k-1)k}}{4} - \frac{k-1}{4} > 0, \quad \forall\, k > 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

	0		$\frac{4}{k}$	$+\infty$
$f'(x)$	n.d.	-	0	+
$f(x)$	n.d.	$\searrow$	Mínimo	$\nearrow$

O gráfico de f é decrescente no intervalo $\left]0, \frac{4}{k}\right]$ e é crescente no intervalo $\left[\frac{4}{k}, +\infty\right[$.

A função f tem um mínimo absoluto em igual a $f\left(\frac{4}{k}\right)$.

$$f\left(\frac{4}{k}\right) = \sqrt{k \times \frac{4}{k}} - \ln\left(k \times \frac{4}{k}\right) = \sqrt{4} - \ln 4 = 2 - \ln 4$$

A função f é a diferença da composição de funções contínuas no seu domínio por isso é contínua em $]0, +\infty[$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} [\sqrt{kx} - \ln(kx)] = \sqrt{0} - \ln 0^+ = 0 - (-\infty) = +\infty$$

O contradomínio da função f é $\left[2 - \ln 4, +\infty\right[$.