Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2ª Fase | Ensino Secundário | 2022

1. Apenas o gráfico da opção C representa uma função que tem um mínimo em $x = 0$, pois todos os pontos que estão na vizinhança do ponto $x = 0$ têm ordenada superior ou igual ao valor da ordenada do ponto que tem abcissa igual a 0.

   Opção(C)

2. A soma de todos os elementos da linha n do triângulo de Pascal é igual a 2^n.

   Sabendo que a soma de todos os elementos de uma dada linha do triângulo de Pascal é igual a 16 384 conseguimos calcular n:

$$2^n = 16384 \Leftrightarrow n = 14$$

   O valor do quarto elemento da linha seguinte ($n = 15$) é igual a:

$$^{15}C_3 = 455$$

   Opção(B)

3. Consideremos os acontecimentos:

   V: O passageiro já viajou de avião
   F: O passageiro jé esteve em Faro

   Como 70% nunca tinham viajado de avião vem que:

   $P(\overline{V}) = \frac{1}{2}$

   Sabemos também que $\frac{2}{5}$ dos passageiros já tinham estado em Faro:

   $P(F) = \frac{2}{5} = 0,4$

   Metade dos que já tinham estado em Faro já tinha viajado de avião o que equivale a:

   $P(V|F) = 0,5$

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$P(V|F) = \frac{P(V \cap F)}{P(F)} \Leftrightarrow 0,5 = \frac{P(V \cap F)}{0,4} \Leftrightarrow P(V \cap F) = 0,2$

	V	$\overline{V}$	
F	0,2		0,4
$\overline{F}$		?	0,6
	0,3	0,7	1

$P(F \cap \overline{V}) = 0,4 - 0,2 = 0,2$

$P(\overline{V} \cap \overline{F}) = 0,7 - 0,2 = 0,5$

Sabendo que o primeiro passageiro a sair do avião nunca tinha estado em Faro, a probabilidade de esta ter sido a primeira viagem de avião deste passageiro é igual a:

$$P(\overline{V}|\overline{F}) = \frac{P(\overline{V} \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{0,5}{0,6} = \frac{5}{6}$$

4. Ao todo existem 10 possibilidades de os três cartões azuis ficarem juntos. Das nove posições que sobram vamos colocar os dois cartões brancos, como são da mesma cor não interessa a ordem ${}^{9}C_2$. Depois de colocados os cartões azuis e brancos sobram 7 posições, vamos colocar os três cartões pretos, como são da mesma cor não interessa a ordem ${}^{7}C_3$. Por último basta colocar nas quatro posições os quatro cartôes vermelhos ${}^{4}C_4$.

   Assim o número de casos favoráveis é igual a $10 \times {}^{9}C_2 \times {}^{7}C_3 \times {}^{4}C_4$.

   O número de casos possíveis é igual a ${}^{12}C_3 \times {}^{9}C_2 \times {}^{7}C_3 \times {}^{4}C_4$.

   $P(\text{os cartões azuis ficarem todos juntos}) = \frac{10 \times {}^{9}C_2 \times {}^{7}C_3 \times {}^{4}C_4}{{}^{12}C_3 \times {}^{9}C_2 \times {}^{7}C_3 \times {}^{4}C_4} = \frac{1}{22}$

5.

   5.1. Como os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{HE}$ formam um ângulo de 90º então o seu produto escalar é igual a 0.

Opção(B)

5.2. Vamos começar por determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BA}$:

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (-3, 6, -2)$$

O vetor $\overrightarrow{BA}$ é um vetor normal ao plano ADE por isso a equação deste plano é da forma:

$$\text{ADE:} \quad -3x + 6y - 2z + d = 0$$

Como o ponto A pertence ao plano ADE, substituindo as coordenadas do ponto A na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$-3x + 6y - 2z + d = 0 \;\Leftrightarrow\; -3 \times -2 + 6 \times 5 - 2 \times 0 + d = 0 \;\Leftrightarrow\; d = -36$$

Logo, $ADE : -3x + 6y - 2z - 36 = 0$.

As coordenadas genéricas de um ponto P pertencente à reta de equação

$(x, y, z) = (0, 0, 3) + k(1, -1, -1),\; k \in \mathbb{R}$ são:

$$\text{P}(k, -k, 3 - k)$$

.

Como o ponto E pertence ao plano ADE (ponto de interseção do plano ADE com a reta acima), substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano ADE conseguimos calcular a constante k:

$-3x + 6y - 2z - 36 = 0 \;\Leftrightarrow\; -3k - 6k - 2(3 - k) - 36 = 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; -9k - 6 + 2k - 36 = 0 \;\Leftrightarrow\; -7k = 42 \;\Leftrightarrow\; k = -6$

Substituindo $k = -6$ nas coordenadas genéricas do ponto conseguimos saber as coordenadas do ponto E:

$$E(-6, 6, 9)$$

6. Substituindo na condição $z = x + yi$:
$z \times \overline{z} = 4 \Leftrightarrow (x + yi)(x - yi) = 4 \Leftrightarrow x^2 - (yi)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$

Esta condição equivale a uma circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a 2.

Opção(A)

7. Vamos começar por determinar o número complexo z:

$z = \frac{4}{1-i} + 4i^{18} = \frac{4(1+i)}{(1-i)(1+i)} + 4i^2 = \frac{4+4i}{2} - 4 = 2 + 2i - 4 = -2 + 2i$

Escrevendo z na forma trigonométrica:

$\begin{cases} tg\ \theta = \frac{2}{-2} \\ \theta \in 2\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta = -1 \\ \theta \in 2\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow\ \theta = \frac{3\pi}{4}$ e $|-2+2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Logo $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Como o número complexo z é uma das raízes cúbicas de um número complexo w, então existem outras duas raízes de w que têm o mesmo módulo de z e o seu argumento difere $\frac{2\pi}{3}$ do $arg(z)$.

As outras duas raízes cúbicas de w na forma trigonométrica são:

$$z_0 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{e} \quad z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$$

8. Calculando o valor da função f no ponto $x = 0$:

$f(0) = \ln\sqrt{e+0} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}$

Calculando o valor do limite lateral da função f quando $x \to 0^-$:

item $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-\cos^2 x}{x} \times \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{1+\cos x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 x}{x} \times \frac{1}{2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \sin x \times \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{2} = 0 \times 1 \times \frac{1}{2} = 0 \qquad$ (Limite notável)

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq f(0)$, então a função f não é contínua em $x = 0$.

9.

9.1. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função g no intervalo $]0, \pi[$:

$$g''(x) = \left(x + 2\cos^2 x\right)' = 1 + 2 \times 2\cos x \times (-\sin x) = 1 - 2 \times 2\cos x \sin x = 1 - 2\sin(2x)$$

Os pontos de inflexão de g correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \ \vee \ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0,\ x = \frac{\pi}{12} \ \in]0, \pi[\ \vee \ x = \frac{5\pi}{12} \in]0, \pi[$

Para $k = 1,\ x = \frac{13\pi}{12} \ \notin]0, \pi[\ \vee \ x = \frac{17\pi}{12} \notin]0, \pi[$

Para $k = -1,\ x = -\frac{11\pi}{12} \ \notin]0, \pi[\ \vee \ x = -\frac{7\pi}{12} \notin]0, \pi[$

Logo, $g''(x)$ tem dois zeros em $x = \frac{\pi}{12}$ e $x = \frac{5\pi}{12}$ no intervalo $]0, \pi[$.

$g''(\frac{\pi}{13}) = 1 - 2\sin\left(\frac{2\pi}{13}\right) < 0$

$g''(\frac{6\pi}{12}) = 1 - 2\sin\pi > 0$

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		π
$g''(x)$	n.d.	+	0	-	0	+	n.d.
$g(x)$	n.d.	$\smile$	P.I.	$\frown$	P.I.	$\smile$	n.d.

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{12}, \pi\right[$.

As abcissas dos pontos de inflexão do gráfico de g são $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{5\pi}{12}$.

9.2. Para determinarmos a abcissa do ponto do gráfico da função g, no intervalo $]-\infty, 0[$,em que a reta tangente ao gráfico da função é paralela à reta de equação $y = -2x$ vamos resolver a equação: $g'(x) = -2 \Leftrightarrow 3e^{2x} - 7e^{x} = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(e^{x})^2 - 7e^{x} + 2 = 0 \ (*_1)$

Fazendo a mudança de variável: $y = e^x$

$(*_1)\ 3y^2 - 7y + 2 = 0$

$a = 3 \qquad b = -7 \qquad c = 2$

Usando a fórmula resolvente temos:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow y = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2-4\times3\times2}}{2\times3} \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{49-24}}{6} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{7+5}{6} \vee y = \frac{7-5}{6} \Leftrightarrow y = 2 \vee y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2 \vee e^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = -\ln 3$$

No intervalo $]-\infty, 0[$, a abcissa do ponto do gráfico da função g em que a reta tangente ao gráfico da função é paralela à reta de equação $y = -2x$ é igual a $x = -\ln 3$.

10. Como $D_h =]0, +\infty[$, a única possível assíntota vertical do gráfico da função h, é a reta $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x+\ln x}{e^x-1} = \frac{1-\infty}{1^+-1} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Concluímos que a reta definida por $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de h.

A função h só está definida em $]0, +\infty[$, logo vamos averiguar a possível existência de uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+\ln x}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1+\frac{\ln x}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x}}{1-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}}{1-0} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+0\times0}{1} = 1$$

Concluímos que $h(x)$ tem uma assíntota horizontal de equação $y = 1$ quando $x \to +\infty$.

11.

11.1. A percentagem de aumento da massa de sal no tanque, no primeiro minuto após a abertura das torneiras, com aproximação às unidades, é igual a:

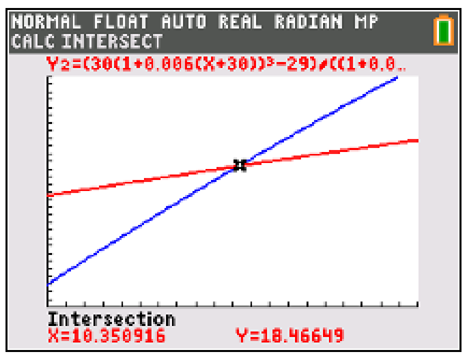
$$[m(1)-m(0)]\times 100\% = \left[\frac{30(1+0{,}006)^3-29}{(1+0{,}006)^2}-\frac{30(1+0)^3-29}{(1+0)^2}\right]\times 100\% \approx 52\%$$

Opção(B)

11.2. Existe um instante a partir do qual, passada meia hora, a massa de sal no tanque triplica, o que corresponde à equação:

$$3m(t)=m(t+30) \Leftrightarrow 3\times\frac{30(1+0{,}006t)^3-29}{(1+0{,}006t)^2}=\frac{30[1+0{,}006(t+30)]^3-29}{[1+0{,}006(t+30)]^2}$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Considerando que $t\in[0,20]$, temos que $t\approx 10,351$ minutos, ou seja, $t\approx 10$ minutos e 21 segundos

12. Os primeiros quatro termos da sucessão são:

$u_1=-1$
$u_2=1$
$u_3=-1$
$u_4=\frac{15}{7}$

Usando o algoritmo da divisão inteira:

Logo temos que $\frac{4n-1}{n+3}=4-\frac{13}{n+3}$.

$\forall n>3 \quad, 0<\frac{1}{n+3}\leq\frac{1}{7}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall n>3, \quad -\frac{1}{7}\leq-\frac{1}{n+3}<0\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{r|l} 4n-1 & n+3 \\ \hline + \quad -4n-12 & 4 \\ -13 & \end{array}$$

$\Leftrightarrow \forall n > 3, \quad -\frac{13}{7} \leq -\frac{13}{n+3} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall n > 3, \quad -\frac{13}{7} + 4 \leq -\frac{13}{n+3} + 4 < 0 + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall n > 3, \quad \frac{15}{7} \leq \frac{4n-1}{n+3} < 4$

Assim vem que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq u_n < 4$.

A sucessão u_n é limitada.

13. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f:

$$f'(x) = \left(\tfrac{1}{3}x^3 + ax^2 + a^2x + \sqrt{2}\right)' = x^2 + 2ax + a^2$$

Os extremos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2ax + a^2$

$A = 1 \qquad b = 2a \qquad c = a^2$

Usando a fórmula resolvente temos:

$x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4Ac}}{2A} \Leftrightarrow x = \frac{-2a \pm\sqrt{(2a)^2-4\times1\times a^2}}{2\times1} \Leftrightarrow x = \frac{-2a \pm\sqrt{4a^2-4a^2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2a}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ x = -a$

Para provarmos que a função f não tem extremos vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\infty$	$-a$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\nearrow$

Concluimos que a função f é crescente em todo o seu domínio, ou seja, não tem extremos.

14. Vamos começar por determinar as coordenadas do ponto A:

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 \Leftrightarrow 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Como o ponto A tem coordenadas $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ e a base do triângulo $[AOB]$ é igual à distância entre os pontos O e A então $\overline{OA} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Sabendo que $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ conseguimos calcular o declive da reta s:

$m_s = \tan\alpha$

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \tan^2\alpha = 3 \Leftrightarrow \tan\alpha = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\alpha = \sqrt{3}$ porque $\alpha \in 1^{\text{o}}$ quadrante

A reta s tem equação:

$$s : y = \sqrt{3}x$$

Agora vamos determinar as coordenadas do ponto B fazendo a interseção das retas r e s:

$\frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 = \sqrt{3}x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{3}x = -1 \Leftrightarrow -\sqrt{3}x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$y_B = \sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2$

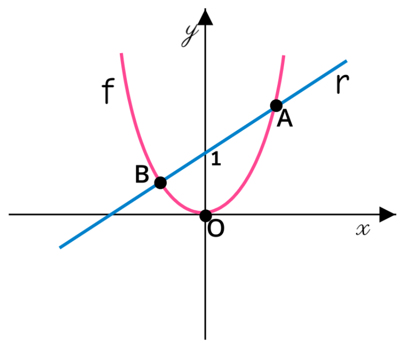
O ponto B tem coordenadas $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right)$, logo a altura do triângulo $[AOB]$ é igual a 2.

A área do triângulo $[AOB]$ é igual a:

$$A_{[AOB]} = \frac{b \times h}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

15. A equação da reta r, não vertical, que passa no ponto de coordenadas $(0,1)$ é da forma $y = mx + 1$.

A figura seguinte ilustra o enunciado e ajuda-nos a entender melhor o problema:



Como os pontos A e B pertencem à reta r e à função f vamos fazer a sua interseção para determinar as suas coordenadas:

$x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0$

$a = 1 \qquad b = -m \qquad c = -1$

Usando a fórmula resolvente temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-(-m) \pm \sqrt{(-m)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1} \Leftrightarrow x = \frac{m \pm \sqrt{m^2+4}}{2}$$

Logo $x_A = \frac{m + \sqrt{m^2+4}}{2}$ e $x_B = \frac{m - \sqrt{m^2+4}}{2}$

Substituindo as abcissas dos pontos A e B na função f conseguimos determinar as suas ordenadas:

$$y_A = \left(\frac{m + \sqrt{m^2+4}}{2}\right)^2 = \frac{m^2+2m\sqrt{m^2+4}+m^2+4}{4} = \frac{m^2}{2} + \frac{m\sqrt{m^2+4}}{2} + 1$$

$$y_B = \left(\frac{m - \sqrt{m^2+4}}{2}\right)^2 = \frac{m^2-2m\sqrt{m^2+4}+m^2+4}{4} = \frac{m^2}{2} - \frac{m\sqrt{m^2+4}}{2} + 1$$

As coordenadas dos pontos A e B são:

$$A\left(\frac{m + \sqrt{m^2+4}}{2}, \frac{m^2}{2} + \frac{m\sqrt{m^2+4}}{2} + 1\right) \quad \text{e} \quad B\left(\frac{m - \sqrt{m^2+4}}{2}, \frac{m^2}{2} - \frac{m\sqrt{m^2+4}}{2} + 1\right)$$

Sabendo que o ponto O é a origem do referencial, isto é, tem coordenadas $(0,0)$, vem que:

$\overrightarrow{OA} = A - O = A$

$\overrightarrow{OB} = B - O = B$

Vamos agora calcular o produto escalar entre os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$:

$\overrightarrow{OA} \, . \, \overrightarrow{OB} = \left(\frac{m + \sqrt{m^2+4}}{2}, \frac{m^2}{2} + \frac{m\sqrt{m^2+4}}{2} + 1 \right) . \left(\frac{m - \sqrt{m^2+4}}{2}, \frac{m^2}{2} - \frac{m\sqrt{m^2+4}}{2} + 1 \right) =$

$= \left(\frac{m + \sqrt{m^2+4}}{2} \right) \left(\frac{m - \sqrt{m^2+4}}{2} \right) + \frac{m^4}{4} - \frac{m^3\sqrt{m^2+4}}{4} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3\sqrt{m^2+4}}{4} - \frac{m^2(m^2+4)}{4} + \frac{m\sqrt{m^2+4}}{2} +$

$+ \frac{m^2}{2} - \frac{m\sqrt{m^2+4}}{2} + 1 = \frac{m^2}{4} - \frac{m^2+4}{4} + \frac{m^4}{4} + \frac{2m^2}{2} - \frac{m^4+4m^2}{4} + 1 =$

$= \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{4} - 1 + \frac{m^4}{4} + m^2 - \frac{m^4}{4} - m^2 + 1 = 0$

Como o produto escalar entre os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é igual a zero concluimos que o ângulo AOB é um ângulo reto.