Proposta de Resolução da Prova Final de Matemática

Prova 92 | Época Especial | 3º Ciclo do Ensino Básico | 2019

Caderno 1

1. De acordo com a figura sabemos que $Q_1 = 303,5$ e $Q_3 = 386$.

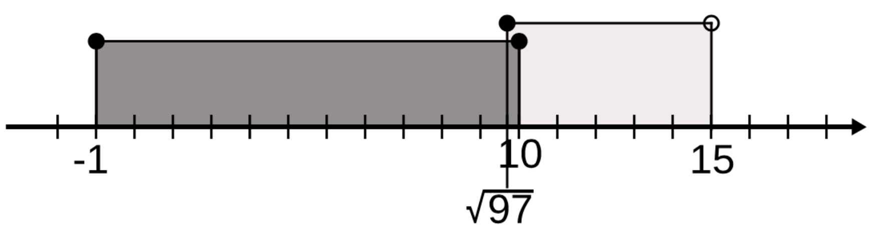
   Logo a amplitude interquartis deste conjunto de dados é:

   $$Q_3 - Q_1 = 386 - 303,5 = 82,5$$

   Opção(C)

2. Usando a calculadora sabemos que $\sqrt{97} \approx 9,8$.

   Representação dos dois intervalos na reta real

   Logo, $[-1, 10] \cup [\sqrt{97}, 15[= [-1, 15[$

3. Valor estimado dos prejuizos = 1650 milhões de euros = 1650 000 000 euros

   Vamos determinar o valor, em euros, dos prejuízos causados pelo furacão,ou seja, $\frac{1}{4}$ de 1650 000 000 euros:

   $$\frac{1}{4} \times 1650\,000\,000 = \frac{1650\,000\,000}{4} = 412\,500\,000$$

Agora basta escrever em notação científica:

$412\,500\,000 = 4,125 \times 10^8$ euros

4. Observando a figura temos que:

$$\overline{BA} = \overline{CA} - \overline{CB} = \overline{CA} - \overline{DE} = 8 - 0,16 = 7,84 \text{ m}$$

O triângulo $[BEA]$ é retângulo em B, usando a definição de seno vem que:

$\sin\alpha = \frac{c.oposto}{hipotenusa} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\overline{BA}}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{7,84}{10,9} \Leftrightarrow \sin\alpha \approx 0,719 \Leftrightarrow \alpha \approx \sin^{-1}(0,719) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha \approx 46^o$

5.

5.1. O plano [ABC] é o plano que contem a face [ABC] do prisma que é perpendicular ao plano que contém a face [ABFE].

O plano [BCD] é o plano que contem a face [BCDF] do prisma que é perpendicular ao plano que contém a face [ABFE].

O plano [EFD] é o plano que contem a face [EFD] do prisma que é perpendicular ao plano que contém a face [ABFE].

Opção(B)

5.2. De acordo com a figura, x corresponde à altura do prisma [ABCDEF].

Vamos calcular x, a altura do prisma:

$$V_{[ABCDEF]} = A_b \times x \Leftrightarrow V_{[ABCDEF]} = \frac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{2} \times x \Leftrightarrow 445000 = \frac{78\times 58,5}{2} \times x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 445000 = 2281,5 \times x \Leftrightarrow x = \frac{445000}{2281,5} \Leftrightarrow x \approx 195,05 \text{ cm}$$

Calculando a área do painel solar, isto é, do retângulo [ACDE]:

$$A_{[ACDE]} = \overline{AE} \times \overline{DE} = 195,05 \times 97,5 \approx 19017 \text{ cm}^2$$

5.3. Pelo critério AA, os triângulos [AXY] e [ABC] são semelhantes:

$$A\hat{X}Y = A\hat{B}C \quad \text{(ângulos retos)} \quad \text{e} \quad X\hat{A}Y = B\hat{A}C$$

Logo os seus lados são proporcionais:

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{XY}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{AC}}$$

Usando a proporção acima conseguimos determinar $\overline{XY}$:

$$\frac{52}{78} = \frac{\overline{XY}}{58{,}5} \Leftrightarrow \overline{XY} = \frac{52 \times 58{,}5}{78} \Leftrightarrow \overline{XY} = 39 \text{ cm}$$

6. Usando um caso particular como exemplo:

$$4 > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{4} < \frac{2}{2}$$

Assim temos que:

$$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{2}{a} < \frac{2}{b}$$

Opção(B)

Caderno 2

7.

7.1. Usando a Regra de Laplace e sabendo que um dado cúbico tem seis faces numeradas de 1 a 6, a probabilidade de obter a face com o número 5 voltada para cima é:

$$P(\text{"Obter a face com o número 5 voltada para cima"}) = \frac{n^{o}\ de\ casos\ favoráveis}{n^{o}\ de\ casos\ possíveis} = \frac{1}{6}$$

		Dado vermelho					
		1	2	3	4	5	6
	1	11	12	13	14	15	16
	2	21	22	23	24	25	26
Dado	3	31	32	33	34	35	36
azul	4	41	42	43	44	45	46
	5	51	52	53	54	55	56
	6	61	62	63	64	65	66

7.2. Vamos começar por construir uma tabela de dupla entrada:

Deste modo conseguimos perceber todas as hipóteses possíveis.

nº de casos favoráveis = nº de entradas da tabela que consta um número ímpar e inferior a 20 = 3

nº de casos possíveis = nº total de entradas da tabela=36

P("O número formado ser um número ímpar inferior a 20")$= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

8.

8.1. O valor que os pais do André lhe emprestaram é igual a:

$$178 - 50 = 128 \text{ euros}$$

Para saldar a dívida, o André combinou com os pais uma prestação mensal de 8 euros, que será paga no primeiro dia de cada mês, sendo a primeira prestação paga no dia 1 de janeiro de 2020:

Data	Prestação (euros)
1 de Janeiro 2020	8
1 de Fevereiro 2020	8
1 de Março 2020	8
1 de Abril 2020	8

Portanto no dia 2 de Abril de 2020 o André terá pago aos pais um total de $8 \times 4 = 32$ euros.

Assim a quantia, em euros, que o André ficará a dever aos pais no dia 2 de abril de 2020 é igual a $128 - 32 = 96$ euros.

Opção(D)

8.2. O valor que o André deve aos pais no início é de 128 euros.

Considerando n o número de prestações mensais, o número de prestações mensais pagas corresponde a $8n$ euros.

Fazendo a subtração do valor que o André deve aos pais no início com $8n$ obtemos uma expressão que representa a quantia, em euros, que o André ficará a dever aos pais após pagar n prestações mensais é:

$$128 - 8n$$

9. Usando a fórmula da área de um losango e desenvolvendo o caso notável temos:

$$A_{losango} = \frac{D \times d}{2} = \frac{(x+4)(x-4)}{2} = \frac{x^2-16}{2}$$

Opção(D)

10. $8x^2 + 2x - 1 = 0$

$a = 8 \qquad b = 2 \qquad c = -1$

Usando a fórmula resolvente temos:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\times 8\times(-1)}}{2\times 8} \Leftrightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{16} \Leftrightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{36}}{16} \Leftrightarrow$
$x = \frac{-2+6}{16} \vee x = \frac{-2-6}{16} \Leftrightarrow x = \frac{4}{16} \vee x = -\frac{8}{16} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \vee x = -\frac{1}{2}$

C.S.$= \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$

11. $\frac{1-5x}{4} > 3(x-1) \Leftrightarrow \frac{1-5x}{4} > 3x - 3 \Leftrightarrow 1 - 5x > 12x - 12 \Leftrightarrow -5x - 12x > -12 - 1$
$\Leftrightarrow -17x > -13 \Leftrightarrow x < \frac{13}{17}$

C.S.$=]-\infty, \frac{13}{17}[$

12. Vamos começar por determinar a ordenada do ponto de abcissa 3, substituindo $x = 3$ na expressão algébrica da função f:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^2 \Leftrightarrow f(3) = \frac{2}{3} \times 3^2 \Leftrightarrow f(3) = \frac{18}{3} \Leftrightarrow f(3) = 6$$

Assim sabemos que as coordenadas do ponto A são $(3, 6)$, sendo que este ponto também pertence à função g.

Sendo a função g uma função de proporcionalidade inversa e sabendo as coordenadas do ponto A podemos calcular a constante de proporcionalidade inversa:

$$k = x \times y = 3 \times 6 = 18$$

Logo a expressão algébrica da função g é:

$$g(x) = \frac{k}{x} = \frac{18}{x}$$

Substituindo a ordenada do ponto B na expressão algébrica da função g conseguimos determinar a constante c:

$$g(x) = \frac{18}{x} \Leftrightarrow 2 = \frac{18}{c} \Leftrightarrow c = \frac{18}{2} \Leftrightarrow c = 9$$

13. Para determinarmos a imagem do triângulo $[ABE]$ pela translação de vetor $\overrightarrow{HI}$ fazemos a soma dos pontos correspondentes aos vértices do triângulo $[ABE]$ com o vetor $\overrightarrow{HI}$:

$$A + \overrightarrow{HI} = B$$
$$B + \overrightarrow{HI} = C$$
$$E + \overrightarrow{HI} = F$$

Assim a imagem do triângulo $[ABE]$ pela translação de vetor $\overrightarrow{HI}$ é o triângulo $[BCF]$.

Opção(A)

14. Seja x o preço, em euros, do livro Aventuras e y o preço sem desconto, em euros, do livro Biografias.

Na sua livraria habitual, os três exemplares (um exemplar do livro Aventuras e dois exemplares do livro Biografias) custam, no total, 39 euros, o que corresponde à equação:

$$x + 2y = 39$$

Quando a Joana foi à livraria para fazer a compra, verificou que o livro Biografias estava com um desconto de 4 euros, pois tinha começado a Festa do Livro. Por isso, decidiu antecipar as compras de Natal e levar dois exemplares do livro Aventuras e três exemplares do livro Biografias, pagando, no total, 50 euros, o que equivale à equação:

$$2x + 3(y - 4) = 50$$

Assim, um sistema de equações que permita determinar o preço do livro Aventuras e o preço sem desconto do livro Biografias pode ser:

$$\begin{cases} x + 2y = 39 \\ 2x + 3(y - 4) = 50 \end{cases}$$

15. Recorrendo às regras operatórias de potências temos:

$\frac{5^{-1} \times 5^{-2}}{5^6} = \frac{5^{(-1+(-2))}}{5^6} = \frac{5^{-3}}{5^6} = 5^{-3-6} = 5^{-9} = \left(\frac{1}{5}\right)^9$

16. Observando a figura e como $[CA]$ é um diâmetro da semicircunferência então temos que $\overset{\frown}{CA} = 180^o$.

O ângulo $A\hat{B}D$ é o ângulo ao centro relativo a $\overset{\frown}{DA}$, ou seja, $\overset{\frown}{DA} = 130^o$.

Assim vem que:

$$\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{CA} - \overset{\frown}{DA} = 180 - 130 = 50^o$$

Como o ângulo $D\hat{E}C$ é o ângulo inscrito relativo a $\overset{\frown}{CD}$, então a sua amplitude é igual a metade da amplitude do arco correspondente:

$$D\hat{E}C = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{50}{2} = 25^o$$

17. Usando a fórmula fundamental da trignometria:

$$\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1 \Leftrightarrow \cos^2\beta + \left(\tfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2\beta + \tfrac{5}{9} = 1 \Leftrightarrow \cos^2\beta = 1 - \tfrac{5}{9} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\beta = \tfrac{4}{9} \Leftrightarrow \cos\beta = \pm\sqrt{\tfrac{4}{9}} \Leftrightarrow \cos\beta = \tfrac{2}{3}, \quad \cos\beta > 0 \text{ porque } \beta \text{ é um ângulo agudo}$$