**Proposta de Resolução da Prova Final de Matemática**

**Prova 92 | Época Especial | 3º Ciclo do Ensino Básico | 2018**

## Caderno 1

1. Conjunto de dados apresentados numa lista ordenada:

$$\{56,6; 59,7; 61,6; 63,4; 68,5; 73,0\}$$

A mediana desta amostra é $\tilde{x} = \frac{61{,}6+63{,}4}{2} = \frac{125}{2} = 62,5$

**Opção(B)**

2. Sabendo que $x$ é uma aproximação de 3,6, com um erro inferior a 0,1, vem que:

$$3,6 - 0,1 < x < 3,6 + 0,1 \;\Leftrightarrow\; 3,5 < x < 3,7$$

Logo temos que:

$$3,5 + 5,3 < x + y < 3,7 + 5,5 \;\Leftrightarrow\; 8,8 < x + y < 9,2$$

**Opção(A)**

3. Distância da Terra a Marte no dia 30 de maio de 2016 $= 75,3$ milhões km

Distância da Terra a Marte prevista no dia 31 de julho de 2018 $= 57$ milhões km

Assim, a diferença entre a distância da Terra a Marte no dia 30 de maio de 2016 e a distância que foi prevista para o dia 31 de julho de 2018 é:

$$75,3 - 57 = 18,3 \text{ milhões km} = 18,3 \times 10^6 \text{ km} = 1,83 \times 10^7 \text{ km}$$

4. De acordo com a figura, relativamente aos triângulos [ABC] e [FED] temos que:

$$\overline{AC} = \overline{DE} \quad , \quad B\hat{A}C = F\hat{E}D \quad \text{e} \quad \overline{CB} = \overline{DF}$$

Pelo critério LAL podemos afirmar que os triângulos [ABC] e [FED] são iguais, ou seja, $\overline{AB} = \overline{FE}$.

Por observação da figura, sabemos que:

$$\overline{CD} = \overline{BF} = \overline{AE} - (\overline{AB} + \overline{FE}) = (\overline{AC} + \overline{DE}) - 2 \times \overline{AB}$$

Recorrendo à definição de cosseno vamos determinar o lado $\overline{AB}$ do triângulo [ABC]:

$\cos(35^o) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos(35^o) = \frac{\overline{AB}}{46} \Leftrightarrow \overline{AB} = \cos(35^o) \times 46 \Leftrightarrow \overline{AB} \approx 0,82 \times 46 \Leftrightarrow \overline{AB} \approx 37,72$ m

Assim temos que:

$$\overline{CD} = (\overline{AC} + \overline{DE}) - 2 \times \overline{AB} \approx (46 + 46) - 2 \times 37,72 \approx 16,56 \approx 17 \text{ m}$$

5.

5.1. O plano definido pelas retas AG e BF é o plano [FAB], representado pela face [FABG] do paralelipípedo retângulo [ABCDEFGH]. O plano é [BAD] perpendicular ao plano [FAB] logo qualquer reta contida neste plano é perpendicular ao plano definido pelas retas AG e BF. Por exemplo, a reta AD.

5.2. Considerando a face [ABCD] do paralelipípedo retângulo [ABCDEFGH] sabemos que o triângulo [ABD] é retângulo.

Recorrendo ao Teorema de Pitágoras vem que:

$(\overline{AB})^2 + (\overline{AD})^2 = (\overline{BD})^2 \Leftrightarrow 10^2 + 3^2 = (\overline{BD})^2 \Leftrightarrow \overline{BD} = \pm\sqrt{109} \Leftrightarrow \overline{BD} = \sqrt{109}$ porque $\overline{BD}$ é uma medida $\Leftrightarrow \overline{BD} \approx 10,4$ cm

5.3. Vamos começar por determinar o diâmetro de cada um dos quatro tanques esféricos:

$V_{Tanque\ Esférico} = 33750 \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = 33750 \Leftrightarrow r^3 = \frac{3\times 33750}{4\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{101250}{4\pi}}$
$r \approx 20,05$ m

Calculando o diâmetro $D$ de cada um dos tanques:

$$D = 2 \times r \Leftrightarrow D \approx 2 \times 20,05 \Leftrightarrow D \approx 40,1$$

De acordo com a figura, o comprimento do compartimento onde estão colocados os quatro tanques esféricos é igual à soma dos diâmetros dos quatro tanques, logo vem que:

$$x = 4 \times d \approx 4 \times 40,1 \approx 160,4 \approx 160 \text{ m}$$

6. Para que o intervalo $[0, \sqrt[3]{n}] \cap ]20, +\infty[$ não seja um conjunto vazio, $\sqrt[3]{n} > 20$.

$$\sqrt[3]{n} = 20 \;\Leftrightarrow\; n = 20^3 \;\Leftrightarrow\; n = 8000$$

Portanto o menor número natural $n$ tal que o intervalo $[0, \sqrt[3]{n}] \cap ]20, +\infty[$ não seja um conjunto vazio é $n = 8000 + 1 = 8001$.

**Caderno 2**

7.

7.1. Se a probabilidade do elemento selecionado ser rapariga é igual a 50%, quer dizer que nessa equipa existe o mesmo número de rapazes e raparigas, logo só pode ser a equipa B.

7.2. Vamos seguir a sugestão e construir uma tabela de dupla entrada:

| | | Equipa B | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Rapaz 1 | Rapaz 2 | Rapariga 1 | Rapariga 2 |
| Equipa A | Rapaz 1 | | | | |
| | Rapaz 2 | | | | |
| | Rapariga | | | | |

Deste modo conseguimos perceber todas as hipóteses possíveis na escolha de um elemento da equipa A e de um elemento da equipa B.

nº de casos favoráveis = nº de entradas da tabela coloridas= 4

nº de casos possíveis = nº total de entradas da tabela = 12

$P$("Dois capitães escolhidos serem ambos rapazes")$= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

8. O termo geral desta sequência é $3n + k$, visto que cada termo da sequência (com exceção do primeiro) tem mais 3 círculos que o termo anterior.

A constante $k$ determina-se a partir do primeiro termo, ou seja, para $n = 1$ o termo geral é $3 + k$ que tem de ser igual a 7, logo $k = 4$.

Então o termo geral desta sequência é $3n + 4$.

**Opção(C)**

9. Como a reta $r$ é paralela à reta $s$ então sabemos que têm o mesmo declive:

$$m_s = m_r = -2$$

Logo, a equação da reta $s$ é da forma: $y = -2x + b$.

Substituindo as coordenadas do ponto $(\frac{3}{2}, 0)$ na equação da reta $s$ conseguimos calcular a constante $b$ (ordenada na origem):

$$y = -2x + b \ \Leftrightarrow \ 0 = -2 \times \tfrac{3}{2} + b \ \Leftrightarrow \ b = 3$$

Assim a equação da reta $s$ é da forma: $y = -2x + 3$.

10. Desenvolvendo o caso notável temos:

$$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

**Opção(C)**

11. $15x^2 + 2x - 1 = 0$

$a = 15 \qquad b = 2 \qquad c = -1$

Usando a fórmula resolvente temos:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \ \Leftrightarrow \ x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 15 \times (-1)}}{2 \times 15} \ \Leftrightarrow \ x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{30} \ \Leftrightarrow \ x = \frac{-2+8}{30} \vee x = \frac{-2-8}{30}$
$\Leftrightarrow \ x = \frac{6}{30} \vee x = \frac{-10}{30} \ \Leftrightarrow \ x = \frac{1}{5} \vee x = -\frac{1}{3}$

C.S.$= \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\}$

12. $\frac{1-x}{2} < 3(2x-1) \ \Leftrightarrow \ \frac{1-x}{2} < 6x - 3 \ \Leftrightarrow \ 1 - x < 12x - 6 \ \Leftrightarrow \ -x - 12x < -6 - 1 \ \Leftrightarrow$
$-13x < -7 \ \Leftrightarrow \ x > \frac{-7}{-13} \ \Leftrightarrow \ x > \frac{7}{13}$

C.S.$= ]\frac{7}{13}, +\infty[$

13. Substituindo a abcissa do ponto P na expressão algébrica da função $f$, vamos determinar a ordenada do ponto P:

$$f(x) = \frac{6}{x} \Leftrightarrow f(2) = \frac{6}{2} \Leftrightarrow f(2) = 3$$

As coordenadas do ponto P são $(2, 3)$.

De acordo com a figura, o ponto P tembém pertence ao gráfico a função $g$.

Substituindo as coordenadas do ponto P na expressão algébrica da função $g$ podemos determinar a constante $a$:

$$g(x) = ax^2 \Leftrightarrow 3 = a \times 2^2 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$$

14. Recorrendo às regras operatórias de potências temos:

$\frac{3^{11}}{3^7} \times 3^{-6} = 3^{11-7} \times 3^{-6} = 3^4 \times 3^{-6} = 3^{4-6} = 3^{-2} = (\frac{1}{3})^2$

15. Seja $x$ o número de rapazes e $y$ o número de de raparigas que se inscreveram inicialmente nessa modalidade do desporto escolar.

Numa modalidade do desporto escolar inscreveram-se inicialmente, 45 alunos, rapazes e raparigas, o que corresponde à equação:

$$x + y = 45$$

Passado algum tempo, inscreveram-se mais 4 rapazes e desistiram 4 raparigas, ficando o número de rapazes a ser o dobro do número de raparigas o que equivale à equação:

$$x + 4 = 2(y - 4)$$

Assim, um sistema de equações que permita determinar o número de rapazes e o número de raparigas que se inscreveram inicialmente nessa modalidade do desporto escolar pode ser:

$$\begin{cases} x + y = 45 \\ x + 4 = 2(y - 4) \end{cases}$$

16. De acordo com a figura, a reflexão do quadrado 5 relativamente ao eixo CD é o quadrado 2. Logo, a imagem da translação do quadrado 2 associada ao vetor $\overrightarrow{AB}$ é o quadrado 3.

**Opção(B)**

17.

17.1. De acorco com a figura, $C\hat{B}A$ é o ângulo inscrito relativo ao arco CA logo a amplitude de $C\hat{B}A$ é metade da amplitude do seu arco correspondente, assim vem que:

$$C\hat{B}A = \frac{\widehat{CA}}{2} \Leftrightarrow C\hat{B}A = \frac{110}{2} \Leftrightarrow C\hat{B}A = 55^o$$

Como a soma dos ângulos internos do triângulo [ABC] é igual a $180^o$, temos que:

$B\hat{A}C+C\hat{B}A+A\hat{C}B = 180 \Leftrightarrow B\hat{A}C+55+85 = 180 \Leftrightarrow B\hat{A}C = 180-55-85 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow B\hat{A}C = 40^o$

17.2. Os triângulos [ABC] e [DEC] têm um ângulo comum ($A\hat{C}B = D\hat{C}E$) e os lados opostos a esse ângulo são paralelos, por isso os triângulos [ABC] e [DEC] são semelhantes, ou seja, os seus lados são proporcionais:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{DA}}$$

**Opção(A)**