Proposta de Resolução da Prova Final de Matemática

Prova 92 | Época Especial | 3º Ciclo do Ensino Básico | 2017

Caderno 1

1. Vamos calcular o módulo da diferença entre 3π e cada uma das opções apresentadas, arredondada às milésimas:

   (A) $|3\pi - 9,40| \approx 0,025$ (B) $|3\pi - 9,41| \approx 0,015$

   (C) $|3\pi - 9,43| \approx 0,005$ (D) $|3\pi - 9,44| \approx 0,015$

   Opção(C)

2. Idade do Universo $=$ 14 000 milhões de anos

   Tempo de vida na terra$=$ 3600 milhões de anos

   Depois da formação do Universo, a vida na Terra surgiu após:

   $14\ 000 - 3600 = 10\ 400$ milhões de anos $= 10\ 400\ 000\ 000$ anos $= 1,04 \times 10^{10}$ anos

3. Vamos começar por determinar a altura da água no reservatório, ou seja, $\overline{BP}$:

   $V_{cilindro\ sombreado} = A_{base} \times altura \Leftrightarrow 50 = \pi(\frac{4,4}{2})^2 \times \overline{BP} \Leftrightarrow 50 = \pi \times 4,84 \times \overline{BP} \Leftrightarrow \overline{BP} = \frac{50}{\pi \times 4,84} \Leftrightarrow \overline{BP} \approx 3,29$ m

   De acordo com a figura vem que:

   $$a = \overline{BP} + \overline{AP} + \frac{\overline{BC}}{2} \approx 3,29 + 1,5 + 2,2 \approx 7 \text{ m}$$

4. Seguindo a sugestão vamos começar por determinar $\overline{ON}$.

   Como o triângulo [ONM] é retângulo em N, pela definição de cos temos:

   $$\cos(M\hat{O}N) = \frac{c.adjacente}{hipotenusa} \Leftrightarrow \cos(56) = \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}} \Leftrightarrow \cos(56) = \frac{\overline{ON}}{2} \Leftrightarrow \overline{ON} \approx 2 \times 0,559$$
   $$\overline{ON} \approx 1,118 \text{ m}$$

Observando a figura vem que:

$$\overline{NP} = \overline{OP} - \overline{ON} \approx 2,5 - 1,118 \approx 1,38 \text{ m}$$

5.

5.1. Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C podemos usar o Teorema de Pitágoras:

$h^2 = c_1^2 + c_2^2 \;\Leftrightarrow\; (\overline{AC})^2 = (\overline{AD})^2 + (\overline{DC})^2 \;\Leftrightarrow\; (\overline{AC})^2 = 1^2 + (\sqrt{8})^2 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; (\overline{AC})^2 = 9 \;\Leftrightarrow\; (\overline{AC}) = \pm\sqrt{9} \;\Leftrightarrow\; (\overline{AC}) = 3 \text{ cm} \qquad (\overline{AC} > 0)$

5.2. Pelo critério AA os triângulos [ADC] e [ABC] são semelhantes:

$$D\hat{A}C = C\hat{A}B \qquad \text{e} \qquad A\hat{D}C = A\hat{C}B$$

Logo os lados dos triângulos [ADC] e [ABC] são proporcionais:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \;\Leftrightarrow\; \frac{3}{\overline{AB}} = \frac{1}{3} \;\Leftrightarrow\; \overline{AB} = \frac{3\times 3}{1} \;\Leftrightarrow\; \overline{AB} = 9 \text{ cm}$$

De acordo com a figura, $\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD} = 9 - 1 = 8$ cm

$A_{[DBC]} = \frac{base \times altura}{2} = \frac{\overline{DB}\times\overline{DC}}{2} = \frac{8\times\sqrt{8}}{2} = 4\sqrt{8} = 11,31 \text{ cm}^2$

Caderno 2

6.

6.1. De acordo com a tabela sabemos que o número de rapazes da turma da Ana é igual a 13 (nº de casos favoráveis) sendo que ao todo existem 29 alunos na turma.

Usando a Regra de Laplace:

P("O aluno contemplado com o bilhete de teatro ser um rapaz")= $\frac{13}{29}$

6.2. Existem ao todo 16 raparigas na turma da Ana, organizando os dados numa lista ordenada temos que a mediana das idades das raparigas é a média entre a idade da oitava e nona posição dessa mesma lista:

$$\tilde{x} = \frac{15+16}{2} = 15,5$$

Opção (B)

7. Vamos construir uma tabela de dupla entrada:

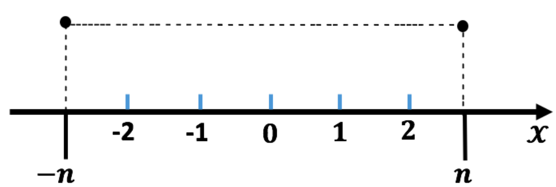
		Eduardo		
		A	B	C
	A	A A	A B	A C
Diana	B	B A	B B	B C
	C	C A	C B	C C

Através da tabela verificamos que existem 9 pares de pontos que podem ser escolhidos (casos possíveis), dos quais 7 (células coloridas) são constituídos por pontos pertencentes à mesma circunferência.

Usando a Regra de Laplace temos que:

P("Pontos escolhidos pertencerem à mesma circunferência")$= \frac{n^{\text{o}}\ de\ casos\ favoráveis}{n^{\text{o}}\ de\ casos\ possíveis} = \frac{7}{9}$

8. Vamos representar o intervalo $[-n, n] \cap \mathbb{Z}$ na reta real:



Logo, para que o intervalo $[-n, n] \cap \mathbb{Z}$ tenha 7 números, $n = 3$.

9. Como f é uma função de proporcionalidade inversa, podemos calcular a constante de proporcionalidade inversa k através do ponto (3,9) pertencente a f:

$$k = 3 \times 9 = 27$$

Assim temos que a expressão algébrica da função f é:

$$f(x) = \frac{k}{x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{27}{x}$$

Opção (D)

10. Vamos começar por calcular a altura do triângulo [BOA] que é igual à ordenada do ponto B:

$$f(10) = 3 \times 10^2 = 300$$

De acordo com a figura temos que:

$A_{região\ sombreada} = A_{[BOA]} - 1000 \Leftrightarrow A_{região\ sombreada} = \frac{10\times 300}{2} - 1000 \Leftrightarrow A_{região\ sombreada} = 1500 - 1000 \Leftrightarrow A_{região\ sombreada} = 500$

11. $2x^2 + 5x - 3 = 0$

$a = 2 \qquad b = 5 \qquad c = -3$

Usando a fórmula resolvente temos:

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times 2\times(-3)}}{2\times 2} \Leftrightarrow x = \frac{-5\pm\sqrt{49}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-5+7}{4} \vee x = \frac{-5-7}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -3$

C.S.$= \{-3, \frac{1}{2}\}$

12. $\frac{2(3-x)}{3} \leq \frac{x}{2} + \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{6-2x}{3} \leq \frac{x}{2} + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 12 - 4x \leq 3x + 4 \Leftrightarrow -4x - 3x \leq 4 - 12 \Leftrightarrow -7x \leq -8 \Leftrightarrow x \geq \frac{8}{7}$

C.S.$= [\frac{8}{7}, +\infty[$

13. Vamos substituir a solução $(1, 1)$ no sistema de equações para determinarmos as constantes a e b:

$$\begin{cases} ax + y = 3 \\ 2x + by = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = 3 \\ 2 + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - 1 \\ b = 5 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Opção (B)

14. Recorrendo às regras operatórias de potências temos:

$(10^4)^3 \times 10^2 \times 5^{-14} = 10^{4\times 3} \times 10^2 \times \frac{1}{5^{14}} = 10^{12} \times 10^2 \times \frac{1}{5^{14}} = 10^{14} \times \frac{1}{5^{14}} = \frac{10^{14}}{5^{14}} = (\frac{10}{5})^{14} = 2^{14}$

15.

15.1. Observando a figura vemos que as retas JC e ED não são complanares.

Opção (A)

15.2. Como as arestas do prisma são todas geometricamente iguais, $\overline{CJ} = \overline{BC} = x - 3$ vem que:

$$A_{[BCJI]} = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

Opção (C)

16. O trapézio [ABCD] é isósceles, $\overline{AD} = \overline{BC}$ e $\overline{CD}$ é o diâmetro da circunferência então $\widehat{CD} = 180^o$.

De acordo com a figura vem que:

$$\widehat{BC} = \frac{180-80}{2} = 50^o$$

Assim, $\widehat{BD} = \widehat{BC} + \widehat{CD} = 50 + 180 = 230^o$.

O ângulo D$\hat{A}$B é o ângulo inscrito relativo ao $\widehat{BD}$, assim D$\hat{A}$B é igual a metade da amplitude do seu arco correspondente:

$$\text{D}\hat{A}\text{B} = \frac{\widehat{BD}}{2} \Leftrightarrow \text{D}\hat{A}\text{B} = \frac{230}{2} \Leftrightarrow \text{D}\hat{A}\text{B} = 115^o$$

17. A imagem do ponto D pela reflexão de eixo r é o ponto A.

Para determinarmos a imagem do ponto A com o vetor $\overrightarrow{EF}$ fazemos a sua soma:

$$A + \overrightarrow{EF} = B$$

18. Pela observação da figura temos que o número de cubos cinzentos, em cada termo, é igual ao número do termo. Desta maneira sabemos que o termo de ordem n tem n cubos cinzentos.

Então o número de cubos brancos do termo de ordem n da sucessão é igual à diferença do número total de cubos com o número de cubos cinzentos:

$$n^2 - n \quad \text{cubos brancos}$$