Proposta de Resolução da Prova Final de Matemática

Prova 92 | Época Especial | 3º Ciclo do Ensino Básico | 2016

Caderno 1

1. Os triângulos [OAB] e [OCD] são semelhantes porque têm um ângulo comum $B\hat{O}A = D\hat{O}C$ e os lados opostos a este ângulo ([AB] e [CD]) são paralelos.

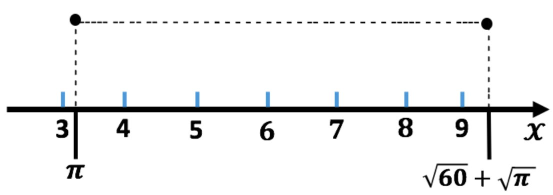
   Logo os lados dos triângulos [OAB] e [OCD] são diretamente proporcionais:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \frac{9{,}8}{\overline{OC}} = \frac{5{,}6}{8{,}4} \Leftrightarrow \overline{OC} = \frac{9{,}8\times 8{,}4}{5{,}6} \Leftrightarrow \overline{OC} = 14,7 \text{ cm}$$

   De acordo com a figura temos que:

$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = 14,7 - 9,8 = 4,9 \text{ cm}$$

2. Usando a calculadora sabemos que $\pi \approx 3,1$ e $\sqrt{60} + \sqrt{\pi} \approx 9,5$.



   Logo o conjunto dos números naturais que pertencem ao conjunto A é $\{4,5,6,7,8,9\}$.

3. Número de glóbulos brancos por mililitro de sangue = 4,7 milhões

   Como 1 litro = 1000 mililitros então 1,5 litros = 1500 mililitros

   Número de glóbulos brancos em 1,5 litros de sangue = $4,7 \times 1500 = 7050$ milhões

   7050 milhões = 7050 000 000 = $7,05 \times 10^9$

4. O triângulo [AOP] é retângulo em P, usando a definição de tan vem que:

$\tan(A\hat{O}P) = \frac{c.oposto}{c.adjacente} \Leftrightarrow \tan(A\hat{O}P) = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \tan(55) = \frac{225}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \overline{OP} = \tan(55)\times 225$
$\Leftrightarrow \overline{OP} = \frac{225}{\tan(55)} \Leftrightarrow \overline{OP} \approx \frac{225}{1{,}43} \Leftrightarrow \overline{OP} \approx 157,34$ m

De acordo com a figura temos que:

$$\overline{OR} = \overline{OP} + \overline{PR} \approx 157,34 + 132 \approx 289,34 \text{ m}$$

Como o triângulo [BOR] é retângulo em R, usando a definição de tan vem que:

$\tan(B\hat{O}R) = \frac{\overline{BR}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \tan(B\hat{O}R) \approx \frac{225}{289{,}34} \Leftrightarrow \tan(B\hat{O}R) \approx 0,78 \Leftrightarrow B\hat{O}R \approx \tan^{-1}(0,78) \Leftrightarrow B\hat{O}R \approx 38^o$

5.

5.1. Vamos começar por calcular $\overline{VC}$. O triângulo [VCA] é retângulo em , logo podemos usar o Teorema de Pitágoras:

$(\overline{AV})^2 = (\overline{VC})^2 + (\overline{CA})^2 \Leftrightarrow 15^2 = (\overline{VC})^2 + 6^2 \Leftrightarrow (\overline{VC})^2 = 189 \Leftrightarrow \overline{VC} = \pm\sqrt{189}$
$\Leftrightarrow \overline{VC} = \sqrt{189}, \quad \overline{VC} > 0$

O volume do sólido é:

$V_{sólido} = V_{cone} + V_{semiesfera} \Leftrightarrow V_{sólido} = \frac{1}{3}A_{base} \times altura + \frac{\frac{4}{3}\pi \times raio^3}{2} \Leftrightarrow V_{sólido} = \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times \sqrt{189} + \frac{\frac{4}{3}\pi \times 6^3}{2} \Leftrightarrow V_{sólido} \approx 518,277 + 452,389 \Leftrightarrow V_{sólido} \approx 971 \text{ cm}^3$

5.2. A superfície esférica de centro no ponto V e que passa no ponto A tem raio $\overline{VA} = 15$ cm.

Opção(D)

6. A expressão algébrica da função de proporcionalidade inversa é da forma:

$$y = \frac{k}{x}$$

Para determinarmos a constante de proporcionalidade inversa k basta substituirmos um ponto pertencente à função (4,8;30) na sua expressão algébrica:

$$30 = \frac{k}{4{,}8} \;\Leftrightarrow\; k = 30 \times 4,8 \;\Leftrightarrow\; k = 144$$

Então a expressão alégrica desta função é $y = \frac{144}{x}$.

Substituindo as coordenadas do ponto $(a; a)$ pertencente à função na sua expressão algébrica temos:

$$a = \frac{144}{a} \;\Leftrightarrow\; a^2 = 144 \;\Leftrightarrow\; a = \pm\sqrt{144} \;\Leftrightarrow\; a = 12 \quad (a > 0)$$

Caderno 2

---

7. Escrevendo os dados numa lista ordenada temos:

8 8 12 12 12 18 18 18 18 24 24 24 24 24 24 32 32 32 32 32

$Q_1 = \frac{12+18}{2} = 15$ $Q_2 = 24$

Opção(C)

8.

8.1. Usando a Regra de Laplace e sabendo que existem ao todo três bolas numeradas indistinguíveis ao tato (3 casos possíveis) em que apenas uma delas tem número par, a probabilidade de a Luísa retirar uma bola com número par é:

P("Luísa retirar uma bola com número par")$= \frac{n^{o}\ de\ casos\ favoráveis}{n^{o}\ de\ casos\ \ possíveis} = \frac{1}{3}$

8.2. Vamos começar por construir uma tabela de dupla entrada:

Como o produto dos números das bolas retiradas pela Luísa era ímpar sabemos que as bolas retiradas tinham os números 3 e 5. Portanto o produto das bolas retiradas pela Luísa é igual a 15. Na tabela de dupla entrada verificamos

	15	20	30
Bolas: 2 e 3	6	6	6
Bolas 2 e 5	10	10	10
Bolas 3 e 5	15	15	15

que existem 2 casos favoráveis e 3 casos possíveis.

Usando a Regra de Laplace, a probabilidade de a bola retirada pelo Pedro ter um número superior ao produto obtido pela Luísa é:

P("Bola retirada pelo Pedro ter um número $>$ 15")= $\frac{n^{o}\ de\ casos\ favoráveis}{n^{o}\ de\ casos\ possíveis} = \frac{2}{3}$

9. De acordo com a figura $\overline{AO} = \sqrt{5}$.

   O diâmetro da circunferência é igual a $2\overline{AO} = 2\sqrt{5}$

   Opção(B)

10. De acordo com a figura temos que:

    $u_1 = 5 \qquad u_2 = 8 \qquad u_3 = 11$

    Opção(D)

11. Como r e s são retas paralelas então têm o mesmo declive. Assim a equação da reta s é da forma:

    $$y = -2x + b$$

    Substituindo as coordenadas de um ponto pertencente à reta s (-3,2) na sua expressão algébrica, conseguimoes determinar b:

    $$y = -2x + b \Leftrightarrow 2 = -2 \times -3 + b \Leftrightarrow 2 = 6 + b \Leftrightarrow b = -4$$

    $s: \ y = -2x - 4$

12. Recorrendo às regras operatórias de potências temos:

$\frac{4^{17}}{2^{17}} \times (\frac{1}{2})^{-20} = (\frac{4}{2})^{17} \times 2^{20} = 2^{17} \times 2^{20} = 2^{17+20} = 2^{37}$

13. Vamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2(x+y)=-x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ 2x+2y=-x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ 3x+2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ 3(3-y)+2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} --- \\ 9-3y+2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ -y=-1-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-10 \\ y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7 \\ y=10 \end{cases}$$

C.S. $= \{(-7, 10)\}$

14. $2x^2 = \frac{x+2}{3} \;\Leftrightarrow\; 6x^2 = x+2 \;\Leftrightarrow\; 6x^2 - x - 2 = 0$

$a = 6 \qquad b = -1 \qquad c = -2$

Usando a fórmula resolvente temos:

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1\pm\sqrt{1^2-4\times6\times(-2)}}{2\times6} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1\pm\sqrt{49}}{12} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1+7}{12} \vee x = \frac{1-7}{12}$
$\Leftrightarrow\; x = \frac{8}{12} \vee x = \frac{-6}{12} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{2}{3} \vee x = -\frac{1}{2}$

C.S. $= \{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}$

15. $-2x < 6 \;\Leftrightarrow\; x > \frac{6}{-2} \;\Leftrightarrow\; x > -3$

Opção(A)

16. Desenvolvendo o caso notável vem que:

$$(x+k)^2 = x^2 - 8x + 16 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 2kx + k^2 = x^2 - 8x + 16$$

Logo k=-4.

17. A reflexão do ponto F e eixo GB é o ponto A.

$A + \overrightarrow{FE} = C$

Opção(C)

18. O ângulo B$\hat{D}$A é o ângulo inscrito na semicircunferência relativamente ao arco AD, por isso a sua amplitude é metade da amplitude do seu arco correspondente:

$$B\hat{D}A = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} \Leftrightarrow B\hat{D}A = \frac{180}{2} \Leftrightarrow B\hat{D}A = 90^o$$

Considerando o triângulo [AED] , temos que a soma dos ângulos internos é igual a 180^o:

$$A\hat{E}D + E\hat{D}A + D\hat{A}E = 180 \Leftrightarrow 70 + 90 + D\hat{A}E = 180 \Leftrightarrow D\hat{A}E = 180 - 70 - 90$$
$$\Leftrightarrow D\hat{A}E = 20^o$$

O ângulo $D\hat{A}E = D\hat{A}C$ é o ângulo inscrito na semicircunferência relativamente ao arco DC, por isso a sua amplitude é metade da amplitude do seu arco correspondente:

$$D\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} \Leftrightarrow 20 = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{DC} = 40^o$$

19. Como os planos α e β são paralelos então todas as retas contidas no plano α são paralelas ao plano β.

Os pontos P e Q pertencem ao plano α o que quer dizer que a reta PQ está contida no plano α, ou seja, é paralela ao plano β.