Proposta de Resolução da Prova Final de Matemática

Prova 92 | Época Especial | 3º Ciclo do Ensino Básico | 2015

Caderno 1

1. Usando a Regra de Laplace temos que:

   P("O convidado escolhido também gostar de mousse de chocolate")$= \frac{n^o \ de \ casos \ favoráveis}{n^o \ de \ casos \ possíveis}$

   nº de casos favoráveis = nº de convidados que gostam de gelatina e mousse de chocolate$= 3$

   nº de casos possíveis = nº de convidados que gostam de gelatina $= 8$

   Assim temos que:

   P("O convidado escolhido também gostar de mousse de chocolate")$= \frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\%$

   Opção(B)

2. Vamos determinar a soma das idades dos quatro filhos do casal Martins S:

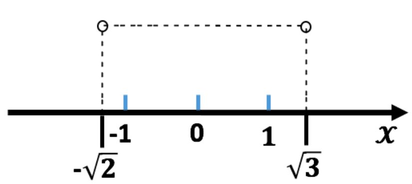
   $$12,25 = \frac{S}{4} \;\Leftrightarrow\; S = 12,25 \times 4 \;\Leftrightarrow\; S = 49$$

   O valor exato da média das idades dos cinco jovens é:

   $$\overline{x} = \frac{13+49}{5} \;\Leftrightarrow\; \overline{x} = \frac{62}{5} \;\Leftrightarrow\; \overline{x} = 12,4 \text{ anos}$$

3. Usando a calculadora sabemos que $-\sqrt{2} \approx -1,1$ e $\sqrt{3} \approx 1,7$

   Representação do intervalo e dos números inteiros nesse intervalo, na reta real:



   Logo, o conjunto dos números inteiros que pertencem ao intervalo $]-\sqrt{2},\sqrt{3}[$ é $\{-1, 0, 1\}$.

4.

4.1. Como o triângulo [TCP] é retângulo em T podemos usar o teorema de pitágoras:

$(\overline{CT})^2 + (\overline{TP})^2 = (\overline{CP})^2 \Leftrightarrow (9,2)^2 + 4^2 = (\overline{CP})^2 \Leftrightarrow 100,64 = (\overline{CP})^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\overline{CP}) = \pm\sqrt{100,64} \Leftrightarrow \overline{CP} = \sqrt{100,64}$ porque $\overline{CP} > 0$

$\overline{CP} = \sqrt{100,64} \approx 10$

4.2. Vamos começar por determinar $\overline{BM}$. Observando a figura temos que:

$$\overline{AB} = \overline{PB} - \overline{PA} \Leftrightarrow \overline{AB} = 8 - 2 \Leftrightarrow \overline{AB} = 6$$

Como M é o ponto médio da corda [AB], temos que:

$$\overline{BM} = \frac{\overline{AB}}{2} \Leftrightarrow \overline{BM} = \frac{6}{2} \Leftrightarrow \overline{BM} = 3$$

De acordo com a figura temos que $\overline{CB}$ é o raio da circunferência assim vem que:

$$\overline{CB} = \overline{CT} = 9,2$$

Como o triângulo [BCA] é isósceles e o ponto M é o ponto médio relativamente a $\overline{AB}$, então $\overline{CM}$ é a altura relativamente a $\overline{AB}$, ou seja, $B\hat{M}C$ é um ângulo reto.

Portanto o triângulo [BCM] é retângulo em M.

Usando a definição de seno vem que:

$\sin(B\hat{C}M) = \frac{c.oposto}{hipotenusa} \Leftrightarrow \sin(B\hat{C}M) = \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \sin(B\hat{C}M) = \frac{3}{9,2} \Leftrightarrow$
$\sin(B\hat{C}M) = \frac{3}{9,2} \Leftrightarrow \sin(B\hat{C}M) \approx 0,326 \Leftrightarrow B\hat{C}M = \sin^{-1}(0,326) \Leftrightarrow$
$B\hat{C}M = 19^o$

4.3. Como C é o centro da circunferência e os pontos A e T pertencem à circunferência temos que:

$$\overline{CA} = \overline{CT}$$

Logo C é um ponto pertencente à mediatriz do segmento de reta [AT].

5.

5.1. Observando a figura a reta IJ é perpendicular ao plano [ABC].

Opção(B)

5.2. Vamos seguir a sugestão e calcular a altura da pirâmide [EFGHI]:

$V_{[EFGHI]} = \frac{1}{3}A_{base} \times a \;\Leftrightarrow\; 6 = \frac{1}{3} \times 3^2 \times a \;\Leftrightarrow\; 6 = 3 \times a \;\Leftrightarrow\; a = \frac{6}{3} \;\Leftrightarrow\; a = 2$ cm

A altura do tronco de pirâmide [ABCDEFGH] é:

$$h = \overline{IJ} - 2 = 15 - 2 = 13 \text{ cm}$$

Assim o volume do tronco da pirâmide quadrangular regular [ABCDEFGH] é:

$V_{[ABCDEFGH]} = \frac{h}{3}(L^2 + L \times l + l^2) \Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]} = \frac{13}{3}(8^2 + 8 \times 3 + 3^2) \Leftrightarrow$
$V_{[ABCDEFGH]} = \frac{13}{3}(73 + 24) \Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]} = \frac{13\times 97}{3} \Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]} \approx 420 \text{ cm}^3$

Caderno 2

6.

6.1. Como o triângulo [ABO] é equilátero temos que B$\hat{O}A = 60^o$, ou seja, $\overset{\frown}{AB} = 60^o$.

De acordo com a figura B$\hat{C}$A é o ângulo inscrito relativamente ao arco AB por isso a sua amplitude é metade do valor do seu arco correspondente:

$$B\hat{C}A = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{60}{2} = 30^o$$

Como o triângulo [CBD] também é equilátero vem que $A\hat{C}D = 30^o$, isto é, $B\hat{C}D = 60^o$.

Logo o ponto C é o centro de uma rotação de amplitude igual a 60^o que transforma o ponto B no ponto D.

Opção(C)

6.2. O triângulo [AEB] é retângulo em E, usando a definição de cosseno vem que:

$\cos(B\hat{A}E) = \frac{c.adjacente}{hipotenusa} \;\Leftrightarrow\; \cos(60^o) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} \;\Leftrightarrow\; \cos(60^o) = \frac{1}{\overline{AB}} \;\Leftrightarrow\; \overline{AB} = \frac{1}{\cos(60^o)}$
$\Leftrightarrow\; \overline{AB} = \frac{1}{0{,}5} \;\Leftrightarrow\; \overline{AB} = 2$

Os triângulos [OAB] e [OAD] são equiláteros, logo temos que :

$$\overline{AB} = \overline{BO} = \overline{OD} = \overline{DA} = 2$$

Assim o perímetro do quadrilátero [ABOD] é:

$P_{[ABOD]} = 4 \times 2 = 8$

6.3. $A_{[BOC]} = \frac{base \times altura}{2} = \frac{2 \times \overline{EB}}{2} = \overline{EB}$

$A_{[BAE]} = \frac{base \times altura}{2} = \frac{1 \times \overline{EB}}{2} = \frac{\overline{EB}}{2}$

Assim temos que:

$$\frac{A_{[BOC]}}{A_{[BAE]}} = \frac{\overline{EB}}{\frac{\overline{EB}}{2}} = \frac{2\overline{EB}}{\overline{EB}} = 2$$

7. Seja x o número de canetas de feltro compradas e y o número de lápis de cor comprados.

A escola gastou 63 euros na compra de canetas de feltro e lápis de cor, sendo que cada caneta de feltro custou 0,25 euros e cada lápis de cor custou 0,20 euros o que corresponde à equação:

$$0,25x + 0,20y = 63$$

O número de canetas de feltro compradas foi o dobro do número de lápis de cor comprados, que pode ser traduzido pela equação:

$$x = 2y$$

Assim, um sistema de equações que permita determinar o número de canetas de feltro compradas e o número de lápis de cor comprados, pode ser:

$$\begin{cases} 0,25x + 0,20y = 63 \\ x = 2y \end{cases}$$

8. $x(6x-1) = 1 \Leftrightarrow 6x^2 - x = 1 \Leftrightarrow 6x^2 - x - 1 = 0$

$a = 6 \qquad b = -1 \qquad c = -1$

Usando a fórmula resolvente temos:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\times 6 \times (-1)}}{2\times 6} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1+5}{12} \vee x = \frac{1-5}{12}$
$\Leftrightarrow x = \frac{6}{12} \vee x = \frac{-4}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{3}$

C.S.= $\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$

9. Aplicando o caso notável:

$$(x-2)^2 - x^2 = x^2 - 4x + 4 - x^2 = -4x + 4$$

Opção(A)

10. O gráfico mostra uma reta que passa pela origem do referencial, ou seja, representa uma função de proporcionalidade direta. A expressão algébrica de uma função de proporcionalidade direta é da forma $y = kx$.

    Vamos começar por calcular a constante de proporcionalidade direta k sustituindo na expressão o ponto (8,400) pertencente à reta:

$$y = kx \;\Leftrightarrow\; 400 = 8k \;\Leftrightarrow\; k = \frac{400}{8} \;\Leftrightarrow\; k = 50$$

    Portanto a expressão algébrica desta função de proporcionalidade direta é $y = 50x$

    Vamos determinar a distância, x percorrida pelo Martim em 10 minutos, ou seja, a distância percorrida pelo Martim desde que saiu de casa até chegar à casa da sua avó:

$$y = 50 \times 10 = 500 \text{ m}$$

    A distância percorrida pelo Martim no trajeto de ida e volta é $2 \times 500 = 1000$ m

11. Um número escrito em notação científica é maior que outro quando o expoente da potência de base 10 for maior.

    Quando os expoentes das potências de base 10 são iguais, o maior número é o que tiver o maior valor multiplicado pela potência de base 10.

    Logo o número real $a = 1,3 \times 10^{23}$ é o maior dos quatro números apresentados.

    Opção(A)

12. Aplicando as regras operatórias de potências temos que:

$$\frac{x^8}{2} - x^{-4} = \frac{(x^4)^2}{2} - \frac{1}{x^4}$$

Como $x^4 = 3$ vem que:

$$\frac{(3)^2}{2} - \frac{1}{3} = \frac{9}{2} - \frac{1}{3} = 276 - \frac{2}{6} = \frac{25}{6}$$

13. O termo de ordem n desta sequência tem ao todo n^2 bolas sendo que n são bolas pretas. Assim, o número de bolas brancas do termo de ordem n é dado pela expressão:

$$n^2 - n$$

Logo o número de bolas brancas do décimo termo é igual a $10^2 - 10 = 90$.

14. Como g é uma função de proporcionalidade inversa, a sua espressão algébrica é da forma:

$$g(x) = \frac{k}{x}, \quad \text{onde } k \text{ é a constante de proporcionalidade inversa.}$$

O ponto $(2, f(2))$ pertence a ambas as funçoes f e g. Como $f(2) = 2^2 = 4$ o ponto tem coordenadas (2,4).

Para calcularmos k basta susbtituir o ponto pertencente à função g na sua expressão algébrica:

$$g(x) = \frac{k}{x} \;\Leftrightarrow\; 4 = \frac{k}{2} \;\Leftrightarrow\; k = 4 \times 2 \;\Leftrightarrow\; k = 8$$

Assim, $g(x) = \frac{8}{x}$

Opção(C)

15. $2 - x > \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 6(2 - x) > 2x - 3$ c $12 - 6x > 2x - 3 \;\Leftrightarrow\; -6x - 2x > -12 - 3 \;\Leftrightarrow\; -8x > -15 \;\Leftrightarrow\; x < \frac{-15}{-8} \;\Leftrightarrow\; x < \frac{15}{8}$

C.S.$=]-\infty, \frac{15}{8}[$

16. A mediana do conjunto de dados, que corresponde ao 2º quartil, é a média dos valores correspondentes às posições centrais da amostra ordenada. Neste caso, se ordenarmos os dados representados no gráfico ficamos com os números 1 e 3 nas duas posições centrais.

A mediana das pontuações obtidas pela equipa nos jogos desse campeonato é igual a:

$$\tilde{x} = \frac{1+3}{2} = 2$$