Proposta de Resolução da Prova Final de Matemática

Prova 92 | 2ª Fase | 3º Ciclo do Ensino Básico | 2019

Caderno 1

1. Recorrendo à máquina de calcular sabemos que:

   $2\pi \approx 6,283$

   $2\sqrt{10} \approx 6,325$

   $6,32 \in [2\pi, 2\sqrt{10}]$

   Opção(C)

2. Área de Portugal $=9,2$ milhões hectares $=$ 9 200 000 hectares

   Vamos determinar a área de Portugal coberta por floresta, ou seja, 35 % de 9 200 000 hectares:

$$\frac{9\ 200\ 000}{x} = \frac{100\%}{35\%} \Leftrightarrow x = \frac{9\ 200\ 000 \times 35\%}{100\%} \Leftrightarrow x = 3\ 220\ 000 \text{ hectares}$$

   Agora basta escrever em notação científica:

   $3\ 220\ 000 = 3,22 \times 10^6$ hectares

3. Vamos começar por ordenar os dados por ordem crescente:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & \mathrm{Q}_1 & & & \mathrm{Q}_2 & & & \mathrm{Q}_3 & & \\ 21 & 26 & | & 43 & 45 & \boxed{50} & 72 & 73 & | & 76 & 82 \end{array}$$

Observando a figura acima concluímos que o 3º quartil é igual à média aritmética entre os números 73 e 76:

$$Q_3 = \frac{73+76}{2} = 74,5$$

Opção(D)

4.

4.1. A reta AB está contida no plano que contém a base [ABCD].

A reta AF é secante e perpendicular ao plano que contém a base [ABCD].

A reta KL é não secante e paralela ao plano que contém a base [ABCD].

Opção(A)

4.2. Vamos começar por determinar $\overline{KA}$.

O triângulo [KMA] é retângulo em A, usando a definição de seno vem que:

$\sin A\hat{M}K = \frac{c.oposto}{hipotenusa} \Leftrightarrow \sin 66^o = \frac{\overline{KA}}{5} \Leftrightarrow \overline{KA} = \sin 66^o \times 5 \Leftrightarrow \overline{KA} \approx 0,9135 \times 5$
$\Leftrightarrow \overline{KA} \approx 4,5675$ m

A distância entre os planos JKL e EFG é igual a 2 m, logo $\overline{FK} = 2$.

De acordo com a figura, a distância entre os planos ABC e FGH é:

$$\overline{KA} + \overline{FK} \approx 4,5675 + 2 \approx 6,5675 \approx 6,6 \text{ m}$$

5.

5.1. Vamos começar por calcular o volume do cilindro:

$$V_{Cilindro} = A_b \times h = \pi \times r^2 \times h = \pi \times \left(\frac{2,4}{2}\right)^2 \times (6,4 - 2,4) \approx 18,096 \text{ m}^3$$

Sabendo que o raio da esfera é igual ao raio da base do cilindro vem que:

$$V_{Esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{2,4}{2}\right)^3 \approx 7,238 \text{ m}^3$$

De acordo com a figura o volume da cisterna é dado por:

$V_{cisterna} = V_{Cilindro} + 2 \times V_{Semiesfera} = V_{Cilindro} + V_{Esfera} \approx 18,096 + 7,238 \approx 25,334 \text{ m }^3$

O volume da cisterna é igual a $25,3 \text{ m }^3$.

5.2. O triângulo [ABC] é retângulo em B, usando o teorema de pitágoras vem que:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 6,4^2 + 2,4^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 46,72 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{46,72} \Leftrightarrow \overline{AC} \approx 6,8 \text{ m} \quad (\overline{AC} > 0)$

6. Os números π e $\sqrt{34}$ são dízimas infinitas não periódicas por isso são números irracionais.

O número $\frac{17}{49}$ é o quociente de dois número inteiros logo é um número racional.

$\sqrt[3]{125} = 5$, que é um número inteiro logo é também um número racional.

Os números racionais que pertencem ao conjunto A são $\frac{17}{49}$ e $\sqrt[3]{125} = 5$.

Caderno 2

7.

7.1. Usando a Regra de Laplace e sabendo que apenas uma das seis árvores é uma azinheira, a probabilidade de a turma da Joana plantar uma azinheira é:

$$P(\text{"Turma da Joana plantar uma azinheira"}) = \frac{n^{\text{o}} \textit{ de casos favoráveis}}{n^{\text{o}} \textit{ de casos possíveis}} = \frac{1}{6}$$

7.2. Vamos começar por construir uma tabela de dupla entrada:

	Sobreiro 1	Sobreiro 2	Sobreiro 3	Carvalho 1	Carvalho 2	Azinheira
Sobreiro 1	-	S1, S2	S1, S3	S1, C1	S1, C2	S1, A
Sobreiro 2	S2, S1	-	S2, S3	S2, C1	S2, C2	S2, A
Sobreiro 3	S3, S1	S3, S2	-	S3, C1	S3, C2	S3, A
Carvalho 1	C1, S1	C1, S2	C1, S3	-	C1, C2	C1, A
Carvalho 2	C2, S1	C2, S2	C2, S3	C2, C1	-	C2, A
Azinheira	A, S1	A, S2	A, S3	A, C1	A, C2	-

Deste modo conseguimos perceber todas as hipóteses possíveis.

nº de casos favoráveis = nº de entradas da tabela que consta dois sobreiros = 6

nº de casos possíveis = nº total de entradas da tabela menos menos as entradas da diagonal = 36 - 6=30

P("Turma do José plantar dois sobreiros")= $\frac{6}{30} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

8.

8.1. Observando o gráfico da figura sabemos que $d(15) = 90$.

Portanto a distância, em metros, do drone à plataforma, 15 segundos depois de iniciar o voo foi de 90 metros.

8.2. Substituindo o ponto $(10, 40)$ na expressão da função $d(t)$ conseguimos calcular o valor de a:

$$d(10) = 40 \Leftrightarrow a \times 10^2 = 40 \Leftrightarrow 100a = 40 \Leftrightarrow a = \frac{40}{100} \Leftrightarrow a = \frac{4}{10} \Leftrightarrow a = \frac{2}{5}$$

Opção(C)

9. $\frac{x-4}{6} - \frac{1}{3} < 2(x+1) \Leftrightarrow \frac{x-4}{6} - \frac{2}{6} < 2x+2 \Leftrightarrow \frac{x-4-2}{6} < \frac{12x+12}{6} \Leftrightarrow x-6 < 12x+12 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x - 12x < 12 + 6 \Leftrightarrow -11x < 18 \Leftrightarrow x > -\frac{18}{11}$

C.S.$=]-\frac{18}{11}, +\infty[$

10. $20x^2 - 9x + 1 = 0$

$a = 20 \qquad b = -9 \qquad c = 1$

Usando a fórmula resolvente temos:

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{9\pm\sqrt{(-9)^2-4\times20\times1}}{2\times20} \Leftrightarrow x = \frac{9\pm\sqrt{81-80}}{40} \Leftrightarrow x = \frac{9\pm\sqrt{1}}{40} \Leftrightarrow x = \frac{9+1}{40} \vee x = \frac{9-1}{40} \Leftrightarrow x = \frac{10}{40} \vee x = \frac{8}{40} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \vee x = \frac{4}{20} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \vee x = \frac{2}{10} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \vee x = \frac{1}{5}$

C.S.= $\{\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\}$

11.

11.1. Observando a figura vem que:

$$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BG}$$

Opção(A)

11.2. A medida do lado do quadrado é igual a $x-5$, aplicando o caso notável a sua área é dada pela expressão:

$$A_{quadrado} = (x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$$

Opção(B)

12. Analisando com atenção os primeiros três termos desta sequência podemos concluir que o número de círculos total de cada termo é sempre igual ao triplo de círculos cinzentos mais um.

$$\text{Número de círculos total} = 3 \times \text{Número de círculos cinzentos} + 1$$

Sabendo que um termo da sequência tem 110 círculos cinzentos então esse mesmo termo tem, no total, $3 \times 110 + 1 = 331$ círculos.

13. Seja y o contributo, em euros, de cada participante na compra do cheque e x o número de participantes.

Como o contributo, em euros, de cada participante na compra do cheque é inversamente proporcional ao número de participantes vem que:

$$y = \frac{k}{x}, \quad \text{onde } k \text{ é a constante de proporcionalidade inversa}$$

Sabendo que inicialmente, o grupo era constituído por 4 amigos, e cada um contribuiria com 12 euros, podemos considerar $x = 4$ e $y = 12$, e assim determinar a constante k:

$$12 = \frac{k}{4} \Leftrightarrow k = 12 \times 4 \Leftrightarrow k = 48$$

Logo a função que traduz a relação entre o contributo, em euros, de cada participante na compra do cheque e o número de participantes é:

$$y = \frac{48}{x}$$

Antes da compra juntaram-se mais dois amigos ao grupo, por isso ficamos com $y = 4 + 2 = 6$

Substituindo $y = 14$ na função acima conseguimos calcular a variável x :

$$6 = \frac{48}{x} \Leftrightarrow x = \frac{48}{6} \Leftrightarrow x = \frac{24}{3} \Leftrightarrow x = 8$$

O contributo, em euros, de cada participante na compra do cheque foi de 8 euros.

14. Como o ângulo $B\hat{C}A$ é o ângulo inscrito relativo a $\widehat{BA}$, então a sua amplitude é igual a metade da amplitude do arco correspondente:

$$B\hat{C}A = \frac{\widehat{BA}}{2} \Leftrightarrow 30^o = \frac{\widehat{BA}}{2} \Leftrightarrow \widehat{BA} = 2 \times 30 \Leftrightarrow \widehat{BA} = 60^o$$

Aplicando uma regra de três simples conseguimos determinar o perímetro do círculo:

$$x = \frac{5 \times 360}{60} = 30 \text{ cm}$$

Perímetro (cm)		Ângulo (graus)
x	——	360^o
5	——	60^o

O perímetro do círculo é igual a 30 cm.

15. Seja x o número de caiaques de um lugar e y o número de caiaques de dois lugares utilizados na descida do rio.

"Um grupo de pessoas está a descer um rio em 28 caiaques, uns de um lugar e outros de dois lugares", o que corresponde à equação:

$$x + y = 28$$

Todos os caiaques têm os seus lugares ocupados, havendo mais 4 pessoas em caiaques de um lugar do que em caiaques de dois lugares o que equivale à equação:

$$x = 2y + 4$$

Assim, um sistema de equações que permita determinar o número de caiaques de cada tipo utilizados na descida do rio pode ser:

$$\begin{cases} x + y = 28 \\ x = 2y + 4 \end{cases}$$

16. Pelo critério AA, os triângulos [ADG] e [GHC] são semelhantes:

$$A\hat{D}G = G\hat{H}C \quad \text{(ângulos retos)} \quad \text{e} \quad A\hat{G}D = G\hat{C}H \quad \text{(ângulos de lados paralelos)}$$

Logo os seus lados são proporcionais:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{HC}}$$

Observando a figura sabemos que:

$$\overline{AG} = \overline{AC} - \overline{GC} = 3 - 1 = 2$$

Vamos calcular $\overline{DG}$ em função de a:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{HC}} \Leftrightarrow \frac{2}{1} = \frac{\overline{DG}}{a} \Leftrightarrow \overline{DG} = \frac{2a}{1} \Leftrightarrow \overline{DG} = 2a$$

Calculando a área do rectângulo [DEFG] em função de a:

$$A_{retângulo} = a \times 2a = 2a^2$$