Proposta de Resolução da Prova Final de Matemática

Prova 92 | 2ª Fase | 3º Ciclo do Ensino Básico | 2018

Caderno 1

1. Escrevendo os dados numa lista ordenada temos:

$$421 \quad 435 \quad 468 \quad 540 \quad 553 \quad 604 \quad 634$$

$Q_1 = 435$

$Q_3 = 604$

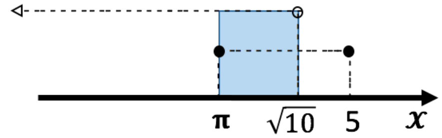
Logo a amplitude interquartis é:

$$Q_3 - Q_1 = 604 - 435 = 169$$

Opção(A)

2. Usando a calculadora sabemos que $\pi < \sqrt{10}$.

Representação dos dois intervalos na reta real



Logo, $]-\infty, \sqrt{10}[\cap [\pi, 5] = [\pi, \sqrt{10}[$

3. Quantidade de aço usado nos dois arranha-céus $= 10,5 + 2 \times 10,5 = 31,5$ mil toneladas

   A quantidade total de aço, em toneladas, é:

$$31,5 = 31,5 \times 10^3 \text{ toneladas}$$

   Escrevendo em notação científica:

$$3,15 \times 10^4 \text{ toneladas}$$

4. Vamos seguir a sugestão e começar por determinar $A\hat{C}M$.

   M é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, logo vem que:

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{4{,}62}{2} = 2,31$$

   Considerando o triângulo retângulo [AMC] e recorrendo à definição de tangente temos:

$$\tan A\hat{C}M = \frac{\overline{AM}}{\overline{CM}} \Leftrightarrow \tan A\hat{C}M = \frac{2{,}31}{4{,}35} \Leftrightarrow A\hat{C}M = \tan^{-1}\frac{2{,}31}{4{,}35} \Leftrightarrow A\hat{C}M \approx 28^o$$

   De acordo com a figura, o segmento $[CM]$ é a bissetriz de $A\hat{C}B$, temos que:

$$A\hat{C}B = 2 \times A\hat{C}M \approx 2 \times 28 = 56^o$$

5.

   5.1. O prisma $[ABCDEFGH]$ é reto e tem bases quadradas, ou seja, a reta CH é perpendicular à face $[EFGH]$.

   Tendo em conta que as faces $[EFGH]$ e $[IJKL]$ são paralelas entre si, a reta CH também é perpendicular à face $[IJKL]$.

   Portanto , a reta CH é perpendicular ao plano que contém a face $[IJKL]$.

   Opção(B)

5.2. Como o triângulo $[HCB]$ é retângulo em C, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras:

$h^2 = c_1^2 + c_2^2 \Leftrightarrow \overline{BH}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CH}^2 \Leftrightarrow \overline{BH}^2 = 9^2 + 6^2 \Leftrightarrow \overline{BH}^2 = 117$
$\Leftrightarrow \overline{BH} = \pm\sqrt{117} \Leftrightarrow \overline{BH} \approx 10,8$ cm porque $\overline{BH} > 0$

5.3. De acordo com a figura temos que:

$$V_{[EFGHIJKL]} = V_{[EFGHV]} - V_{[JKLIV]}$$

$V_{[EFGHV]} = \frac{1}{3}A_{[EFGH]} \times altura = \frac{1}{3} \times 9^2 \times 24 = 648 \text{ cm}^3$

$V_{[JKLIV]} = \frac{1}{3}A_{[JKLI]} \times altura = \frac{1}{3} \times 3^2 \times (24 - 16) = 24 \text{ cm}^3$

Assim, o volume do tronco de pirâmide $[EFGHIJKL]$ é:

$$V_{[EFGHIJKL]} = V_{[EFGHV]} - V_{[JKLIV]} = 648 - 24 = 624 \text{ cm}^3$$

6. Consideremos a e b dois números reais positivos tais que $a < b$:

$$a < b \Leftrightarrow -a > -b \Leftrightarrow 1 - a > 1 - b$$

Opção(B)

Caderno 2

7.

7.1. Usando a Regra de Laplace e sabendo que dos sete cartões, apenas um deles tem a palavra «sábado», o valor da probabilidade da Carolina extrair o cartão com a palavra «sábado» é:

$$P(\text{"Extrair o cartão com a palavra «sábado»"}) = \frac{n^{o}\ de\ casos\ favoráveis}{n^{o}\ de\ casos\ \ possíveis} = \frac{1}{7}$$

7.2. Vamos começar por construir uma tabela de dupla entrada:

	2ªf.	3ªf.	4ªf.	5ªf.	6ªf.	Sáb.	Dom.
2ªf.	-	2ª e 3ª	2ª e 4ª	2ª e 5ª	2ª e 6ª	2ª e Sáb.	2ª e Dom.
3ªf.	3ª e 2ª	-	3ª e 4ª	3ª e 5ª	3ª e 6ª	3ª e Sáb.	3ª e Dom.
4ªf.	4ª e 2ª	4ª e 3ª	-	4ª e 5ª	4ª e 6ª	4ª e Sáb.	4ª e Dom.
5ªf.	5ª e 2ª	5ª e 3ª	5ª e 4ª	-	5ª e 6ª	5ª e Sáb.	5ª e Dom.
6ªf.	6ª e 2ª	6ª e 3ª	6ª e 4ª	6ª e 5ª	-	6ª e Sáb.	6ª e Dom.
Sáb.	Sáb. e 2ª	Sáb. e 3ª	Sáb. e 4ª	Sáb. e 5ª	Sáb. e 6ª	-	Sáb. e Dom.
Dom.	Dom. e 2ª	Dom. e 3ª	Dom. e 4ª	Dom. e 5ª	Dom. e 6ª	Dom. e Sáb.	-

Deste modo conseguimos perceber todas as hipóteses possíveis na extração ao acaso e em simultâneo, de dois dos sete cartões na caixa.

nº de casos favoráveis = nº de entradas da tabela em que os cartões não contêm a palavra «sábado» nem a palavra «domingo = 20

nº de casos possíveis = nº total de entradas da tabela - 7 = 49 - 7 = 42

$P(\text{"Cartões não conterem as palavras «sábado» ou «domingo»"}) = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$

8. No primeiro dia o aparelho recolheu 12 amostras, a partir do segundo dia o mesmo aparelho foi reprogramado e passou a recolher 6 amostras, ou seja:

$n = 1$ Número total de amostras de água recolhidas pelo aparelho = 12
$n = 2$ Número total de amostras de água recolhidas pelo aparelho = 6
$n = 3$ Número total de amostras de água recolhidas pelo aparelho = 6
...

Opção(D)

9. Como a reta r contém os pontos de coordenadas $(0,0)$ e $(4,-1)$ podemos determinar o seu declive:

$$m_r = \frac{-1-0}{4-0} = -\frac{1}{4}$$

As retas r e s são paralelas logo têm o mesmo declive:

$$m_s = m_r = -\frac{1}{4}$$

Assim a equação da reta s é da forma:

$$\text{s: } y = -\frac{1}{4}x + b$$

Substituindo na equação da reta s o ponto de coordenadas $(8,-5)$ conseguimos calcular a constante b (ordenada na origem):

$$y = -\frac{1}{4}x + b \;\Leftrightarrow\; -5 = -\frac{1}{4} \times 8 + b \;\Leftrightarrow\; b = 2 - 5 \;\Leftrightarrow\; b = -3$$

Assim a equação da reta s é:

$$\text{s: } y = -\frac{1}{4}x - 3$$

10. De acordo com a figura:

$A_{ABCDE} = A_{ABCE} + A_{CDE} = x^2 + \frac{x \times 4}{2} = x^2 + 2x = x(x+2)$

Opção(A)

11. $24x^2 + 2x - 1 = 0$

$a = 24 \qquad b = 2 \qquad c = -1$

Usando a fórmula resolvente temos:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\times 24 \times (-1)}}{2\times 24} \Leftrightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{100}}{48} \Leftrightarrow x = \frac{-2+10}{48} \vee x = \frac{-2-10}{48}$
$\Leftrightarrow x = \frac{8}{48} \vee x = -\frac{12}{48} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \vee x = -\frac{1}{4}$

C.S.$= \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\}$

12. $\frac{1}{4}(3-x) - 2 > \frac{1}{3}x \Leftrightarrow \frac{3(3-x)}{12} - \frac{24}{12} > \frac{4x}{12} \Leftrightarrow 9 - 3x - 24 > 4x \Leftrightarrow -3x - 4x > 24 - 9$
$\Leftrightarrow -7x > 15 \Leftrightarrow x < -\frac{15}{7}$

    C.S.$=]-\infty, -\frac{15}{7}[$

13. Vamos começar por determinar $g(4)$:

$$g(4) = \frac{8}{4} = 2$$

    Como $f(3) = g(4)$, o ponto de coordenadas $(3,2)$ pertence à função f.

    Substituindo as coordenadas do ponto $(3,2)$ na expressão algébrica de f podemos calcular a constante a:

$$f(x) = ax^2 \Leftrightarrow 2 = a \times 3^2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{9}$$

14. Seja x o número de itens em que foi assinalada a opção correta e y o número de itens em que foi assinalada uma opção incorreta.

    O teste escrito é composto, exclusivamente, por 25 itens de escolha múltipla o que corresponde à equação:

$$x + y = 25$$

    Um aluno que respondeu a todos os itens teve uma classificação de 70 pontos sendo que em cada item, são atribuídos 4 pontos se for assinalada a opção correta, e é descontado 1 ponto se for assinalada uma opção incorreta, o que pode ser traduzido pela equação:

$$4x - y = 70$$

    Assim, um sistema de equações que permita determinar o número de homens e o número de mulheres, pode ser:

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ 4x - y = 70 \end{cases}$$

15. Recorrendo às regras operatórias de potências temos:

$\frac{6^{-4}}{(2^4)^2 \times 3^8} = \frac{6^{-4}}{2^{4\times 2} \times 3^8} = \frac{6^{-4}}{2^8 \times 3^8} = \frac{6^{-4}}{(2\times 3)^8} = \frac{6^{-4}}{6^8} = 6^{-4-8} = 6^{-12} = (\frac{1}{6})^{12}$

16. Para determinarmos a imagem do ponto E pela translação de vetor $\overrightarrow{GE}$ com o vetor $\overrightarrow{EH}$ fazemos a soma do ponto E com os vetores $\overrightarrow{GE}$ e $\overrightarrow{EH}$:

$$E + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EH} = C + \overrightarrow{EH} = D$$

Assim a imagem do ponto E pela translação de vetor $\overrightarrow{GE}$ com o vetor $\overrightarrow{EH}$ é o ponto D.

17. Observando a figura vemos que a reflexão do ponto F relativamente ao eixo EB é o ponto D e que a translação do ponto D associada ao vetor $\overrightarrow{FA}$ é o ponto C.

18. De acordo com a figura e sabendo que [CD] é o diâmetro da semicircunferência, vem que:

$$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{CA} = 180 - 110 = 70^o$$

$A\hat{C}D$ é o ângulo inscrito relativo ao arco AD logo a sua amplitude é igual a metade da amplitude do seu arco correspondente:

$$A\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{70}{2} = 35^o$$

Considerando o triângulo [ABC], a soma dos seus ângulos internos é igual a 180^o, assim vem que:

$$180 = B\hat{A}C + A\hat{C}B + C\hat{B}A \;\Leftrightarrow\; 180 = 25 + 35 + C\hat{B}A \;\Leftrightarrow\; C\hat{B}A = 120^o$$

19. As retas r, s e t são concorrentes num ponto, isto é, as três retas intersetam-se num único ponto, vamos chamar a este ponto o ponto I.

Os triângulos $[IXU]$ e $[IVY]$ são semelhantes, logo os seus lados são correspondentes:

$$\frac{UX}{VY} = \frac{UV}{VI} = \frac{XY}{YI} \Leftrightarrow \frac{9}{4} = \frac{UV}{VI} = \frac{XY}{YI}$$

Os triângulos $[IXW]$ e $[IYZ]$ também são semelhantes, logo os seus lados também são correspondentes:

$$\frac{XW}{YZ} = \frac{XY}{YI} = \frac{WZ}{ZI} \Leftrightarrow \frac{XW}{YZ} = \frac{9}{4} = \frac{WZ}{ZI}$$

Opção(C)