Proposta de Resolução da Prova Final de Matemática

Prova 92 | 2ª Fase | 3º Ciclo do Ensino Básico | 2016

Caderno 1

1. Vamos calcular o módulo da diferença entre $\sqrt[3]{14}$ e cada uma das opções apresentadas, arredondada às centésimas:

(A) $|\sqrt[3]{14}-2,2|\approx 0,21$ (B) $|\sqrt[3]{14}-2,3|\approx 0,11$

(C) $|\sqrt[3]{14}-2,5|\approx 0,09$ (D) $|\sqrt[3]{14}-2,6|\approx 0,19$

Opção(C)

2.

2.1. As bases do prisma [ABCDEFGH] são paralelas. Como a reta GF está contida na base superior do prisma [EFGH] então é paralela a qualquer reta contida na base inferior do prisma [ABCD], ou seja, é paralela ao plano que contem esta base do prisma.

2.2. Para calcularmos o volume do prisma quadrangular [ABCDEFGH] usamos a fórmula:

$$V_{[ABCDEFGH]}=A_{[ABCD]}\times a$$

onde $a=altura_{prisma}=altura_{cilindro}=5,3$ cm

Através do raio do cilindro vamos determinar a área da base quadrada do prisma: $A_{[ABCD]}=\overline{BA}^2$

$\overline{DB}=2\times raio=2\times 3=6$ cm

Consideremos o triângulo [DAB] retângulo em A, usando o teorema de pitágoras vem que:

$$h^2=c^2+c^2 \;\Leftrightarrow\; 6^2=2\overline{BA}^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{36}{2}=\overline{BA}^2 \;\Leftrightarrow\; \overline{BA}^2=18\text{ cm}^2$$

Assim,

$$V_{[ABCDEFGH]}=A_{[ABCD]}\times a \;\Leftrightarrow\; V_{[ABCDEFGH]}=18\times 5,3 \;\Leftrightarrow\; V_{[ABCDEFGH]}\approx 95\text{ cm}^3$$

2.3. A planificação da superfície lateral de um cilindro é um retângulo, cujas medidas dos lados são o perímetro da base e a altura do cilindro.

Logo $A_{[s.l.cilindro]}=A_{[Retângulo]}=P_{[Base\ Cilindro]}\times a$

Calculando o perímetro da base do cilindro, temos:

$$P_{[Base\ Cilindro]}=2\pi raio=2\times 3\times\pi=6\pi\text{ cm}$$

A área da superfície lateral do cilindro é:

$$A_{[s.l.cilindro]}=P_{[Base\ Cilindro]}\times a \;\Leftrightarrow\; A_{[s.l.cilindro]}=6\pi\times 5,3 \;\Leftrightarrow\; A_{[s.l.cilindro]}\approx 100\text{ cm}^2$$

3. Observando a figura temos que $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}$

Como o triângulo [ABD] é isósceles e $\overline{AC}$ é a altura relativa à base $\overline{BD}$, temos que:

$$\overline{BC} = \overline{CD} \qquad \text{e} \qquad B\hat{A}C = \frac{B\hat{A}D}{2} = \frac{76}{2} = 38^o$$

Pela definição da tangente vem que:

$\tan(38^o) = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \tan(38^o) = \frac{\overline{BC}}{51} \Leftrightarrow \overline{BC} = \tan(38^o) \times 51 \Leftrightarrow \overline{BC} \approx 0,78 \times 51 \Leftrightarrow \overline{BC} \approx 39,78$

Então, $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = 2 \times \overline{BC} \approx 2 \times 39,78 \approx 80$ m

4. Vamos começar por calcular a constante k usando a fórmula da média do conjunto de dados:

$\frac{30+70+100+k}{4} = 60 \Leftrightarrow 200 + k = 4 \times 60 \Leftrightarrow k = 240 - 200 \Leftrightarrow k = 40$

Assim, o conjunto ordenado dos dados é $\{30, 40, 70, 100\}$.

A mediana do conjunto de dados, que corresponde 2º quartil, é a média dos valores correspondentes às posições centrais da amostra ordenada: $\tilde{x} = \frac{40+70}{2} = 55$

5. Como $0,4 = \frac{4}{10}$, então temos que:

$$\frac{n}{0,4} = \frac{n}{\frac{4}{10}} = \frac{10n}{4}$$

Substituindo sucessivamente n por valores naturais vem que:

Para n=1, $\frac{10n}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2,5 \notin \mathbb{N}$

Para n=2, $\frac{10n}{4} = \frac{20}{4} = 5 \in \mathbb{N}$

Como $n = 2$, $[-1, \frac{10n}{4}] = [-1, \frac{20}{4}] = [-1, 5]$.

O conjunto de números inteiros ($\mathbb{Z}$) que pertencem ao intervalo $[-1, 5]$ é $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Portanto neste intervalo existem 7 números inteiros.

Caderno 2

6.

6.1. Usando a Regra de Laplace e sabendo que podem sair três bolas numeradas de 1 a 3 temos que:

$$P(\text{"Retirar a bola com o número 2"}) = \frac{n^{\text{o}}\ de\ casos\ favoráveis}{n^{\text{o}}\ de\ casos\ possíveis} = \frac{1}{3}$$

6.2. Vamos começar por construir uma tabela de dupla entrada:

	Bola Adição	Bola Multiplicação
Bolas 1 e 2	3	2
Bolas 1 e 3	4	3
Bolas 2 e 3	5	6

Deste modo conseguimos perceber todas as hipóteses possíveis.

nº de casos favoráveis = nº de entradas da tabela com o número 4 = 1

nº de casos possíveis = nº total de entradas da tabela = 6

P("Valor obtido ser igual a 4")= $\frac{1}{6}$

7. $6 \times 10^{-2} + 0,05 = 0,06 + 0,05 = 0,11 = 1,1 \times 10^{-1}$

8. Vamos calcular o número total de círculos (brancos e pretos) no 100^o termo através da expressão dada:

$$3 \times 100 + 6 = 306$$

Pela observação da figura temos que o número de círculos pretos, em cada termo, é igual ao número do termo. Desta maneira sabemos que o termo de ordem 100 tem 100 círculos pretos.

Então o número de círculos brancos do 100^o termo da sequência é igual à diferença do número total de círculos com o número de círculos pretos:

$$306 - 100 = 206 \quad \text{círculos brancos}$$

9. As retas r e s são paralelas por isso têm o mesmo declive $m = 1,5$.

Assim a expressão algébrica da função f que representa a reta s é da forma:

$$f(x) = 1,5x + b.$$

Pela observação da figura verificamos que $0 < b < 9$.

Opção(A)

10. A função g é uma função de proporcionalidade inversa logo a sua expressão algébrica é da forma $g(x) = \frac{k}{x}$

O ponto P tem coordenadas (2,$f(2)$) onde $f(2) = 2 \times 2^2 = 8$, ou seja, P(2,8).

Como P pertence à função g, substituindo na sua expressão algébrica obtemos constante k:

$$g(x) = \frac{k}{x} \;\Leftrightarrow\; 8 = \frac{k}{2} \;\Leftrightarrow\; k = 8 \times 2 \;\Leftrightarrow\; k = 16$$

Então, a expressão algébrica da função g é : $g(x) = \frac{16}{x}$.

11. Vamos substituir a solução (1,0) em cada um dos sistemas:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=0 \\ 1=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=0 \\ 1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=1 \\ 1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=1 \\ 1=1 \end{cases}$$

Opção(D)

12. $x(x-1)+2 = 3-x^2 \;\Leftrightarrow\; x^2-x+2 = 3-x^2 \;\Leftrightarrow\; x^2-x+2-3+x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x^2-x-1=0$

$a = 2 \qquad b = -1 \qquad c = -1$

Usando a fórmula resolvente temos:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\times 2\times(-1)}}{2\times 2} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1\pm\sqrt{9}}{4} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1+3}{4} \vee x = \frac{1-3}{4} \;\Leftrightarrow\; x = 1 \vee x = -\frac{1}{2}$

C.S.$= \{-\frac{1}{2}, 1\}$

13. $2(1-x) > \frac{x}{5}+1 \;\Leftrightarrow\; 2-2x > \frac{x}{5}+1 \;\Leftrightarrow\; 10-10x > x+5 \;\Leftrightarrow\; -10x-x > 5-10 \;\Leftrightarrow\; -11x > -5 \;\Leftrightarrow\; x < \frac{5}{11}$

C.S.$=]-\infty, \frac{5}{11}[$

14. Recorrendo às regras operatórias de potências temos:

$\frac{6^{10}}{3^{10}} \times (4)^6 = (\frac{6}{3})^{10} \times (2^2)^6 = 2^{10} \times 2^{6\times 2} = 2^{10} \times 2^{12} = (2)^{10+12} = 2^{22}$

15. Desenvolvimento do caso notável, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

16.

16.1.

16.1.1. De acordo com a figura sabemos que $Di\hat{a}metro\ de\ C_2 = \overline{PC}$

Os triângulos [PCD] e [PAB] são semelhantes visto que têm um ângulo comum (em P) e os lados opostos a este ângulo ($\overline{AB}$ e $\overline{CD}$) são paralelos.

Como os lados são proporcionais temos que:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \frac{3{,}5}{\overline{PC}} = \frac{2}{6} \Leftrightarrow \overline{PC} = \frac{3{,}5\times 6}{2} \Leftrightarrow \overline{PC} = 10,5 \text{ cm}$$

Opção(C)

16.1.2. O lugar geométrico dos pontos do plano que distam 3,5 cm do ponto P é uma circunferência de centro em P e raio 3,5 cm ($\overline{AP}$).

Opção(B)

16.2. De acordo com a figura, a amplitude do arco $\overset{\frown}{PC}$ é 180^o visto que $\overline{PC}$ é o diâmetro da circunferência.

Então a amplitude do arco $\overset{\frown}{CD}$ é igual à diferença das amplitudes dos arcos $\overset{\frown}{PC}$ e $\overset{\frown}{PD}$, ou seja:

$$\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{PC} - \overset{\frown}{PD} = 180 - 110 = 70^o$$

O ângulo $C\hat{P}D$ é um ângulo inscrito relativamente ao arco $\overset{\frown}{CD}$, logo a amplitude de ângulo é igual a metade da amplitude do arco correspondente:

$$\text{C}\hat{\text{P}}\text{D}= \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{70}{2} = 35^o$$