Proposta de Resolução da Prova Final de Matemática

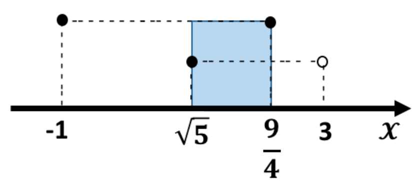
Prova 92 | 1ª Fase | 3º Ciclo do Ensino Básico | 2017

Caderno 1

---

1. Usando a calculadora sabemos que $\sqrt{5} < 9$.

   Representação dos dois intervalos na reta real

   Logo, $\left[-1,\sqrt{5}\right] \cap \left[\frac{9}{4},3\right[= \left[\sqrt{5},\frac{9}{4}\right]$

   Opção(C)

2. Resolução máxima do olho humano $= 0,1\ mm = 1 \times 10^{-1}\ mm$

   Resolução máxima do microscópio electrónico $= 0,000004\ mm = 4 \times 10^{-6}\ mm$

   Assim, o quociente entre a resolução máxima do olho humano e a resolução máxima do microscópio electrónico é:

   $$\frac{0{,}1}{0{,}000004} = \frac{1\times10^{-1}}{4\times10^{-6}} = \frac{1}{4} \times 10^{-1-(-6)} = 0,25 \times 10^5 = 2,5 \times 10^4\ mm$$

3. Conjunto de dados apresentados numa lista ordenada:

   $$\{23, 25, 31, 32, 32, 44, 45, 56\}$$

   A mediana desta amostra é $\tilde{x} = 32$ e a média é $\overline{x} = \frac{23+25+31+32+32+44+45+56}{8} = 36$

   Opção (B)

4. Observando a figura sabemos que $\overline{AB} = \overline{EC} + 0,2$ m (20cm=0,2m).

   Recorrendo à definição de cosseno vamos determinar o lado $\overline{EC}$ do triângulo [DCE]:

$$\cos(10^o) = \frac{\overline{EC}}{4,1} \Leftrightarrow \overline{EC} = \cos(10^o) \times 4,1 \Leftrightarrow \overline{EC} \approx 0,985 \times 4,1 \Leftrightarrow \overline{EC} \approx 4,039 \text{ m}$$

   A distância do candeeiro ao tabuleiro da ponte, em metros, arredondado às décimas é:

   $\overline{AB} \approx 4,039 + 0,2 \approx 4,2$ m

5.

   5.1. As bases de um prisma são paralelas entre si, logo o plano [ABC] é paralelo ao plano [FGH]. Qualquer reta contida no plano [ABC] é paralela ao plano [FGH]. Por exemplo, a reta $\overline{AB}$.

   5.2.

   5.2.1. Como o triângulo $[AST]$ é retângulo podemos usar o teorema de pitágoras:

$$(\overline{AS})^2 + (\overline{ST})^2 = (\overline{AT})^2 \;\Leftrightarrow\; 6^2 + 4^2 = (\overline{AT})^2 \;\Leftrightarrow\; 52 = (\overline{AT})^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \overline{AT} = \pm\sqrt{52} \;\Leftrightarrow\; \overline{AT} = \sqrt{52} \;\text{ porque } \overline{AT} \text{ é uma medida}$$

$$\overline{AT} = \sqrt{52} \approx 7,2 \text{ cm}$$

   5.2.2. Para calcular o volume de uma pirâmide usamos a fórmula: $V_{[AFGE]} = \frac{1}{3}.A_b.h$

   $h = \overline{AF} = 9$ cm e $A_b = A_{[FGE]} = \frac{\overline{FG}.\overline{FE}}{2}$ onde $\overline{FG} = \overline{FE}$ porque o prisma [ABCDEFGH] tem bases quadradas.

   Pelo critério AA os triângulos [AFG] e [AST] são semelhantes porque $F\hat{A}G = S\hat{A}T$ e $G\hat{F}A = A\hat{S}T$ (são ambos ângulos retos).

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{ST}}{\overline{FG}} \;\Leftrightarrow\; \frac{6}{9} = \frac{4}{\overline{FG}} \;\Leftrightarrow\; \overline{FG} = 6 \text{ cm}$$

   $A_b = A_{[FGE]} = \frac{\overline{FG}.\overline{FE}}{2} = \frac{6\times 6}{2} = 18 \text{ cm}^2$

   Portanto, $V_{[AFGE]} = \frac{1}{3}.A_b.h = \frac{1}{3} \times 18 \times 9 = 54 \text{ cm}^3$

Caderno 2

6.

6.1. Usando a Regra de Laplace temos que:

$$P(\text{"Eduarda escolher uma sala com número par"}) = \frac{n^{o}\ de\ casos\ favoráveis}{n^{o}\ de\ casos\ possíveis}$$

nº de casos favoráveis = nº de salas com número par com sessões de divulgação do curso de Espanhol = 1

nº de casos possíveis = nº de salas com sessões de divulgação do curso de Espanhol = 3

Assim temos que:

$$P(\text{"Eduarda escolher uma sala com número par"}) = \frac{1}{3}$$

6.2. Vamos seguir a sugestão e construir uma tabela de dupla entrada:

		E		
		Sala 3	Sala 4	Sala 5
A	Sala 3	3,3	3,4	3,5
	Sala 4	4,3	4,4	4,5

Deste modo conseguimos perceber todas as hipóteses possíveis para o Daniel assistir às duas apresentações.

nº de casos favoráveis = nº de entradas da tabela com números distintos= 4

nº de casos possíveis = nº total de entradas da tabela = 6

$P(\text{"Daniel escolher salas com números diferentes"}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

7. O termo geral desta sequência é 3n+k, visto que cada termo da sequência (com exceção do primeiro) tem mais 3 círculos que o termo anterior.

A constante k determina-se a partir do primeiro termo, ou seja, para $n = 1$ o termo geral é $3 + k$ que tem de ser igual a 6, logo $k = 3$.

Então o termo geral desta sequência é $3n + 3$, fazendo $n = 100$ obtemos o número de círculos que tem o centésimo termo da sequência: $3 \times 100 + 3 = 303$ círculos.

8. Como f é uma função de proporcionalidade inversa, podemos calcular a constante de proporcionalidade inversa através de um ponto (x, y) do seu gráfico:

$$k = x \times y \;\Leftrightarrow\; k = 6 \times 3 = 18$$

Opção (D)

9. Para calcular a área de um trapézio usamos a fórmula: $A_{[AOCB]} = \frac{B+b}{2} \times h$

Pela observação do gráfico sabemos que $B = 4$ e $b = 2$
A altura do trapézio é dada por $\overline{OC}$ que corresponde à ordenada do ponto B.

Para determinar a ordenada do ponto B basta substituir na expressão da função f a abcissa do mesmo ponto, ou seja: $f(2) = 2 \times 2^2 = 8$

B(2,8) portanto $\overline{OC} = 8$

$A_{[AOCB]} = \frac{B+b}{2} \times h = \frac{4+2}{2} \times 8 = 24$

10. $6x^2 - x - 1 = 0$

$a = 6 \qquad b = -1 \qquad c = -1$

Usando a fórmula resolvente temos:

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{1-4\times6\times(-1)}}{2\times6} \Leftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{25}}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1+5}{12} \vee x = \frac{1-5}{12}$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{3}$

C.S.$= \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$

11. Recorrendo às regras operatórias de potências temos:

$3(1-x) > \frac{X+5}{2} \Leftrightarrow 3 - 3x > \frac{X+5}{2} \Leftrightarrow 6 - 6x > x + 5 \Leftrightarrow -6x - x > 5 - 6$
$\Leftrightarrow -7x > -1 \Leftrightarrow x < \frac{-1}{-7} \Leftrightarrow x < \frac{1}{7}$

C.S.$=]-\infty, \frac{1}{7}[$

12. O sistema apresentado tem duas retas: uma horizontal $(y = 3)$ e uma reta oblíqua de equação $y = -x + 4$. A reta oblíqua tem declive negativo $(m = -1)$ e ordenada na origem igual a 4.

Opção (A)

13. Recorrendo às regras operatórias de potências temos:

$(6^4)^2 \times 6^3 \times 2^{-11} = 6^{4\times 2} \times 6^3 \times 2^{-11} = 6^8 \times 6^3 \times \frac{1}{2^{11}} = 6^{8+3} \times \frac{1}{2^{11}} = 6^{11} \times \frac{1}{2^{11}} = \frac{6^{11}}{2^{11}} = (\frac{6}{2})^{11} = 3^{11}$

14. Usando o caso notável $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ onde $a = x$ e $b = 2$ temos:

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$$

15. A afirmação "Por um ponto exterior a um plano passa um único plano perpendicular ao primeiro" é falsa.

Opção (D)

16. $A\hat{C}B$ é o ângulo inscrito relativo ao arco AB, logo a amplitude do ângulo ACB é metade da amplitude do seu arco:

$$A\hat{C}B = \frac{120}{2} = 60^o$$

Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180:

$$A\hat{B}C = 180 - 40 - 60 = 80^o$$

17. Para determinarmos a imagem do ponto P pela translação de vetor $\overrightarrow{QS}$ fazemos a soma do ponto P com o vetor $\overrightarrow{QS}$:

$$P + \overrightarrow{QS} = P + \overrightarrow{PT} = T$$

Opção (D)

18. «Dados quaisquer dois números reais a e b, se $a < b$, então $a^2 < b^2$.»
Por exemplo $a = -2$ e $b = 0$

$$\text{Apesar de } -2 < 0 \text{ temos que } (-2)^2 > 0^2 \Leftrightarrow 4 > 0$$