Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1ª Fase | Ensino Secundário | 2022

1. A sucessão $(-1)^n$ é igual a -1 quando n é ímpar e é igual a 1 quando n é par, logo podemos representar a sucessão $\frac{(-1)^n}{n}$ da seguinte forma:

$$\frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Como $\lim -\frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n} = 0$ então $\frac{(-1)^n}{n}$ é uma sucessão convergente.

Opção(B)

2. Conhecendo o valor da soma dos cinco primeiros termos da progressão geométrica:

$S_5 = u_1 \times \frac{1-r^5}{1-r} \Leftrightarrow u_1 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^5}{1-\frac{2}{3}} = 211 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{1-\frac{32}{243}}{\frac{1}{3}} = 211 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{633}{243} = 211 \Leftrightarrow u_1 = 81$

Sabendo o primeiro termo e a razão da progressão geométrica conseguimos calcular o quinto termo desta progressão:

$u_5 = u_1 \times r^4 = 81 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 81 \times \frac{16}{81} = 16$

3. Como $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0$

Recorrendo à fórmula da probabilidade total:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,6 = P(A) + 1 - 0,6 - 0 \Leftrightarrow P(A) = 0,2$

Sabemos que $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \Leftrightarrow P(\overline{A}) = 0,8$

Opção(D)

4. Temos três cores disponíveis por isso podemos escolher duas peças da mesma cor ou duas peças de cores diferentes.

A primeira hipótese é se escolhermos duas peças da mesma cor, ou seja, neste caso não interessa a ordem com que as colocamos no tabuleiro. Das três cores escolhemos uma ($^3C_1 = 3$) e colocamos as duas peças em duas das doze casas disponíveis no tabuleiro (como não interessa a ordem $^{12}C_2$) o que corresponde a $3 \times {}^{12}C_2$.

A segunda hipótese é se escolhermos duas peças de cores diferentes, ou seja, neste caso já interessa a ordem com que as colocamos no tabuleiro porque obtemos uma configuração colorida distinta. Das três cores escolhemos duas ($^3C_2$) e colocamos as duas peças em duas das doze casas disponíveis no tabuleiro (como interessa a ordem $^{12}A_2$) o que corresponde a $^3C_2 \times {}^{12}A_2$.

5. Consideremos os acontecimentos:

S: Jogar Semáforo
R: Jogar Rastros

Como metade dos alunos jogou Semáforo vem que:

$P(S) = \frac{1}{2}$

Sabemos também que um quarto dos alunos não jogou Rastros:

$P(\overline{R}) = \frac{1}{4}$

Um quinto dos alunos que não jogaram Rastros jogou Semáforo o que equivale a:

$P(S|\overline{R}) = \frac{1}{5}$

	S	$\overline{S}$	
R	$P(R \cap S)$	$P(R \cap \overline{S})$	$P(R)$
$\overline{R}$	$P(\overline{R} \cap S)$	$P(\overline{R} \cap \overline{S})$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$P(S|\overline{R}) = \frac{P(\overline{R} \cap S)}{P(\overline{R})} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{P(\overline{R} \cap S)}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow P(\overline{R} \cap S) = \frac{1}{20}$

De acordo com a tabela acima, temos que:

$P(\overline{R} \cap \overline{S}) = P(\overline{R}) - P(\overline{R} \cap S) = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

A probabilidade de um aluno que participou no torneio, escolhido ao acaso, não ter jogado Semáforo e ter jogado Rastros é igual a:

$$P(R \cap \overline{S}) = P(\overline{S}) - P(\overline{R} \cap \overline{S}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

6.

6.1. Para que dois planos sejam perpendiculares o produto escalar dos seus vetores normais tem de ser igual a zero.

$(1,4,-3).(0,4,-3) \neq 0$, logo não pode ser a opção (A)

$(3,4,1).(0,4,-3) \neq 0$, logo não pode ser a opção (B)

Tanto a opção (C) como a opção (D) verificam esta condição.

Vamos averiguar se o ponto de coordenadas $(1,2,-1)$ pertence ao plano definido na opção(C):

$3 \times 2 + 4 \times (-1) \neq 8$

Concluímos que o ponto $(1,2,-1)$ não pertence ao plano definido na opção(D).

Vamos confirmar que o ponto de coordenadas $(1,2,-1)$ pertence ao plano definido na opção(D):

$1 + 3 \times 2 + 4 \times (-1) = 3$

Concluímos que o ponto $(1,2,-1)$ pertence ao plano definido na opção(C).

Opção(D)

6.2. O ponto A pertence ao eixo Oy por isso tem coordendas $(0,y,0)$ e pertence ao plano que contém a base do cone. Substituindo o ponto A na equação do plano da base do cone conseguimos determinar y:

$4y - 3 \times 0 = 16 \Leftrightarrow y = 4$

O ponto A tem coordenadas $(0,4,0)$.

Vamos escrever a equação vetorial da reta VA:

$$VA\colon\ (x,y,z) = (0,4,0) + k(0,4,-3)\ , \quad k \in \mathbb{R}$$

O ponto V pertence ao eixo Oz por isso tem coordendas $(0,0,z)$ e pertence à reta VA. Substituindo o ponto V na equação vetorial da reta VA conseguimos determinar z:

$$\begin{cases} 0 = 0+0 \\ 0 = 4+4k \\ z = -3k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ k = -1 \\ z = -3 \times -1 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ \text{———} \\ z = 3 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

O ponto V tem coordenadas $(0,0,3)$.

Calculando a altura do cone:

$$\text{d}(VA) = \sqrt{0+(4-0)^2+(0-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

O volume do cone é igual a:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \times A_{base} \times altura = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 5 = \frac{45}{3}\pi = 15\pi$$

7. Observando a figura sabemos que:

$$|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CB}| = \text{raio} = 3$$

De modo a calcular o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ vamos usar uma regra de três simples:

Perímetro		Ângulo
2π	——	α
$2\pi \times 3$	——	2π

$\alpha = \overrightarrow{CA}\,\hat{}\,\overrightarrow{CB} = \frac{2\pi \times 2\pi}{6\pi} = \frac{2\pi}{3}$

Usando a fórmula do produto escalar vem que:

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \times |\overrightarrow{CB}| \times \cos(\overrightarrow{CA}\,\hat{}\,\overrightarrow{CB}) = 3 \times 3 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 9 \times -\frac{1}{2} = -\frac{9}{2}$

8.

8.1. Calculando o valor da função f no ponto $x = 2$:

$f(2) = \frac{e^{2-2}}{2+2} = \frac{1}{4}$

Calculando o valor dos limites laterais da função f no ponto $x = 2$:

- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{e^{2-2^+}}{2+2} = \frac{1}{4}$

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{\sin(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{\sin(x-2)}{(x-2)} \times \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{(x+2)} =$
  $= \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{\sin(x-2)}{(x-2)} \times \frac{1}{4} = \ (*_1)$

  Fazendo a mudança de variável: $y = x - 2 \ \ (y \to 0^+ \ \text{ quando } \ x \to 2^+)$

  $(*_1) = \lim\limits_{y \to 0^+} \frac{\sin y}{y} \times \frac{1}{4} = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ (Limite notável)

Como $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) =$ f(2), então a função f é contínua em $x = 2$.

8.2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f no intervalo $]-\infty, -2[$:

$$f'(x) = \left(\frac{e^{2-x}}{x+2}\right)' = \frac{-e^{2-x}(x+2) - e^{2-x}}{(x+2)^2} = \frac{e^{2-x}(-x-3)}{(x+2)^2}$$

Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{e^{2-x}(-x-3)}{(x+2)^2} = 0 \ \Leftrightarrow \ e^{2-x}(-x-3) = 0 \ \wedge \ (x+2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ e^{2-x} = 0 \ _{(cond.\ impossível)} \ \vee \ -x-3 = 0 \ \wedge \ x+2 \neq 0 \ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ e^{2-x} = 0 \ _{(cond.\ impossível)} \ \vee \ x = -3 \ \wedge \ x \neq -2$

Logo, $f'(x)$ tem um zero em $x = -3$.

$f'(-4) = \frac{e^{2+4}(4-3)}{(-4+2)^2} = \frac{e^6}{4} > 0$

$f'(-1) = \frac{e^{2+1}(1-3)}{(-1+2)^2} = -\frac{2e^3}{1} = -2e^3 < 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\infty$	-3		-2
$f'(x)$	$+$	0	$-$	n.d.
$f(x)$	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	n.d.

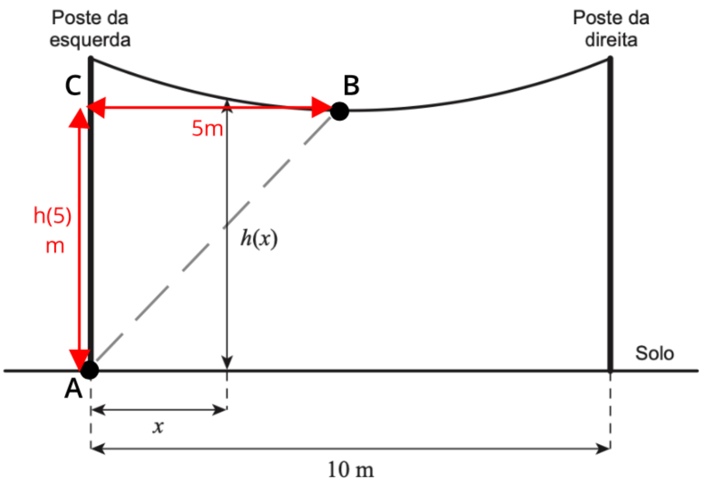
O gráfico de f é crescente no intervalo $]-\infty,-3]$ e é decrescente no intervalo $[-3,-2[$.

$f(-3)=\frac{e^{2+3}}{-3+2}=-e^5$

A função f tem um máximo relativo igual a $-e^5$.

9.

9.1. Observando a figura abaixo percebemos que a distância da base do poste da esquerda ao ponto do cabo que está mais próximo do solo é igual à hipotenusa do triângulo retângulo [ABC]:



A distância, arredondada às décimas de metro, da base do poste da esquerda ao ponto do cabo que está mais próximo do solo é igual a:

$d(AB)^2=5^2+h(5)^2 \Leftrightarrow d(AB)^2=25+\left[6,3\left(e^{\frac{5-5}{12,6}}+e^{\frac{5-5}{12,6}}\right)-7,6\right]^2 \Leftrightarrow d(AB)^2=$

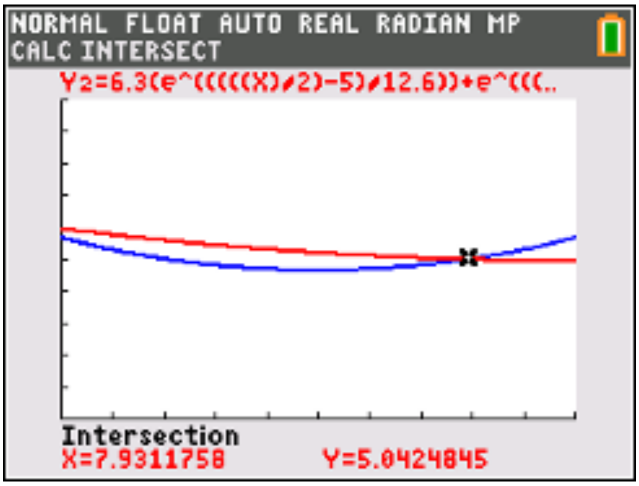
$50 \Leftrightarrow d(AB) = \pm\sqrt{50} \Leftrightarrow d(AB) \approx 7,1$

Opção(A)

9.2. Consideremos um ponto do cabo situado a d metros do poste da esquerda, verifica-se que, diminuindo 50% essa distância, a altura, relativamente ao solo, diminui 30 centímetros (0,3 metros), o que corresponde à equação:

$$h\left(\frac{d}{2}\right) = d(h) - 0,3$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, conseguimos determinar o valor de d:



Considerando que $d \in]0,10[$, o valor de d, arredondado às décimas de metro, é igual a $7,9$ m.

10. O ponto W é o afixo de um número complexo w tal que $Im(w) = -Re(w)$ então w escrito na forma trigonométrica é da forma:

$$w = |w|e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

$w^2 = (|w|e^{i\frac{7\pi}{4}})^2 = |w|^2e^{i\frac{7\pi}{4}\times 2} = |w|^2e^{i\frac{7\pi}{2}}$

$-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Calculando $-iw^2$:

$$-iw^2 = e^{i\frac{3\pi}{2}} \times |w|^2 e^{i\frac{7\pi}{2}} = |w|^2 e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{7\pi}{2}\right)} = |w|^2 e^{i\frac{10\pi}{2}} = |w|^2 e^{i5\pi}$$

Opção(C)

11. Vamos começar por escrever os números complexos $-\sqrt{3}+i$ e $\sqrt{2}i$ na forma trigonométrica:

$\begin{cases} tg\ \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \theta \in 2\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \theta \in 2\ ^{\text{o}}\ Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$ e $|-\sqrt{3}+i| = \sqrt{4} = 2$

$-\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$\sqrt{2}i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

Calculando z^3 :

$z^3 = \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}i}\right)^6 = \left(\frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)^6 = \left[\frac{2}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2})}\right]^6 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i\frac{6\pi}{3}} = 8e^{i2\pi}$

As soluções da equação $z^3 = 8e^{i2\pi}$ são:

$$z = \sqrt[3]{8\,e^{i2\pi}} = 2\,e^{i\frac{2\pi+2k\pi}{3}},\ \ k \in \{0,1,2\}$$

Para $k=0$, $z_0 = 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}} \notin$ 3ºquadrante

Para $k=1$, $z_1 = 2\,e^{i\frac{4\pi}{3}} \in$ 3ºquadrante

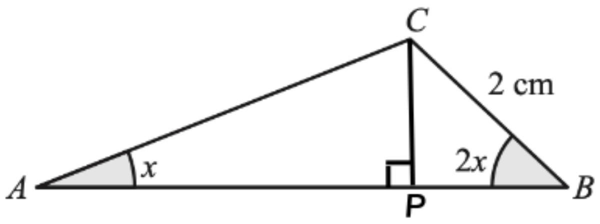
O número complexo que é solução da equação e cujo afixo, no plano complexo, pertence ao terceiro quadrante é $z_1 = 2\,e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Escrevendo z_1 na forma algébrica:

$z_1 = 2\,e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1-\sqrt{3}i$

12. Vamos partir o triângulo $[ABC]$ em dois triângulos retângulos como está representado na figura abaixo:

Aplicando a razão trigonométrica do cos no triângulo retângulo $[PBC]$ conseguimos determinar uma expressão de $[PB]$:



$\cos(2x) = \frac{\overline{PB}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \overline{PB} = 2\cos(2x) \Leftrightarrow \overline{PB} = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overline{PB} = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$

Aplicando a razão trigonométrica do sin no triângulo retângulo $[PBC]$ conseguimos determinar uma expressão de $[PC]$:

$\sin(2x) = \frac{\overline{PC}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \overline{PC} = 2\sin(2x) \Leftrightarrow \overline{PC} = 4\cos x \sin x$

Aplicando a razão trigonométrica da tan no triângulo retângulo $[APC]$ conseguimos determinar uma expressão de $[AP]$:

$\tan(x) = \frac{\overline{PC}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4\cos x \sin x}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{4\cos^2 x \sin x}{\sin x} \Leftrightarrow \overline{AP} = 4\cos^2 x$

O comprimento de [AB] é dado pela expressão:

$[AB] = [AP]+[PB] = 4\cos^2 x+2\cos^2 x-2\sin^2 x = 6\cos^2 x-2(1-\cos^2 X) = 8\cos^2 x-2$

13. Como $D_g =]1, +\infty[$, a única possível assíntota vertical do gráfico da função g, é a reta $x = 1$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} [5x - 3\ln(x-1)] = 5 - 3\ln(0^+) = 5 - 3(-\infty) = +\infty$

Concluímos que a reta definida $x = 1$ é assíntota vertical do gráfico de g.

A função g só está definida em $]1, +\infty[$, logo vamos averiguar a existência de uma única assíntota oblíqua quando $x \to +\infty$.

$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x-3\ln(x-1)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[5 - 3\frac{\ln(x-1)}{x}\right] = 5 - 3 \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x-1)}{x} \quad (*_2)$

Fazendo a mudança de variável: $y = x - 1 \Leftrightarrow x = y + 1 \quad (y \to +\infty$ quando $x \to +\infty)$

$(*_2) = 5 - 3 \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(y)}{y+1} = 5 - 3\frac{1}{\lim_{x\to+\infty} \frac{y+1}{\ln(y)}} = 5 - \frac{3}{\lim_{x\to+\infty} \frac{y}{\ln(y)} + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln y}} = 5 - \frac{3}{+\infty+0} = 5$
(Limite notável)

$b = \lim_{x\to+\infty} [g(x) - 5x] = \lim_{x\to+\infty} -3\ln(x-1) = -3 \times +\infty = -\infty$

Concluímos a função g não tem assíntotas oblíquas.

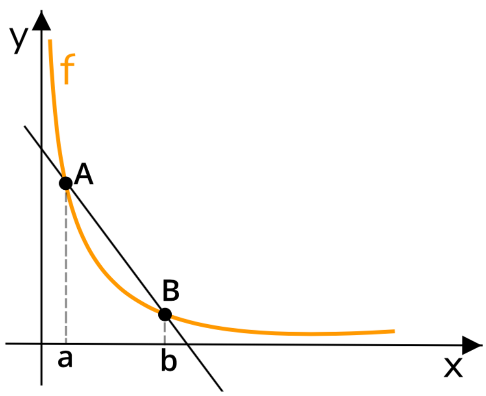
14. $(e^x - 1)\ln(5-2x) + e^x\ln(3-x) = \ln(3-x) \ \wedge\ 5-2x > 0 \ \wedge\ 3-x > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e^x\ln(5-2x) - \ln(5-2x) + e^x\ln(3-x) = \ln(3-x) \ \wedge\ -2x > -5 \ \wedge\ -x > -3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e^x[\ln(5-2x) + \ln(3-x)] = \ln(3-x) + \ln(5-2x) \ \wedge\ x < \frac{5}{2} \ \wedge\ x < 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e^x[\ln\big((5-2x)(3-x)\big)] = \ln\big((3-x)(5-2x)\big) \ \wedge\ x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e^x[\ln\big((5-2x)(3-x)\big)] - \ln\big((3-x)(5-2x)\big) = 0 \ \wedge\ x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \big(\ln(2x^2 - 11x + 15)\big)(e^x - 1) = 0 \ \wedge\ x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ln(2x^2 - 11x + 15) = 0 \ \vee\ e^x - 1 = 0 \ \wedge\ x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 15 = e^0 \ \vee\ e^x = 1 \ \wedge\ x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 14 = 0 \ \vee\ x = \ln 1 \ \wedge\ x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 2 \ \vee\ x = \frac{7}{2} \ \vee\ x = 0 \ \wedge\ x < \frac{5}{2}$

C.S.$= \{0, 2\}$

15. A função f está definida, em $\mathbb{R}^+$, por $f(x) = \frac{k}{x}$, ou seja, é uma função de proporcionalidade inversa e o seu gráfico é uma hiperbole.

Sejam A e B dois pontos do gráfico de f , em que A é ponto de menor abcissa.

Fazendo uma representação gráfica da função f:



As coordenadas destes dois pontos são da forma:

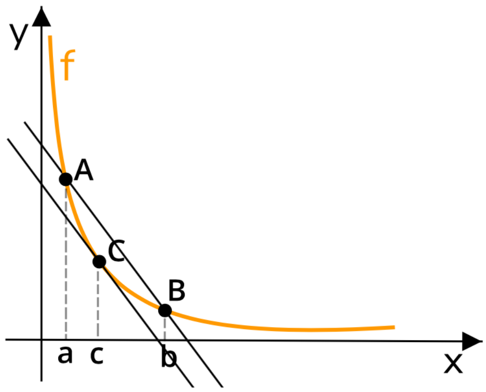
$$A\left(a, \frac{k}{a}\right) \quad \text{e} \quad B\left(b, \frac{k}{b}\right)$$

Calculando o declive da reta AB:

$$m_{AB} = \frac{\frac{k}{b} - \frac{k}{a}}{b-a} = \frac{\frac{ka-kb}{ab}}{b-a} = \frac{ka-kb}{ab(b-a)} = \frac{k(a-b)}{ab(b-a)} = -\frac{k}{ab}$$

Vamos agora considerar um ponto C pertencente ao gráfico de f em que a reta tangente ao gráfico no ponto C é paralela à reta AB.

Representando graficamente a função f agora com o ponto C e com as duas retas paralelas:



Observando a figura acima percebemos que a abcissa deste ponto C tem de estar entre as abcissas dos pontos A e B, ou seja $a < c < b$.

O ponto C tem coordenadas $\left(c, \frac{k}{c}\right)$

Vamos determinar a expressão da primeira derivada da função f:

$$f'(x) = \left(\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2}$$

Calculando o valor da derivada de f no ponto de abcissa c:

$$f'(c) = -\frac{k}{c^2}$$

Como a reta AB é paralela à reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa c então os declives das duas retas são iguais, logo vem que:

$$m_{AB} = f'(c) \Leftrightarrow -\frac{k}{ab} = -\frac{k}{c^2} \Leftrightarrow ab = c^2 \Leftrightarrow ab = c \times c \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{b}{c}$$

Assim temos que a, c e b são três termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão $\frac{c}{a}$ $\left(\text{ ou } \frac{b}{c}\right)$.