Resolução - Volume

1. Vamos começar por calcular o volume da pirâmide $[ABCDI]$:

$$V_{[ABCDI]} = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{9^2 \times 36}{3} = 972 \text{ cm}^3$$

Agora vamos determinar o volume da pirâmide $[EFGHI]$ com $36 - 12 = 24$ centímetros de altura:

$$V_{[EFGHI]} = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{6^2 \times 24}{3} = 288 \text{ cm}^3$$

O volume do tronco de pirâmide $[ABCDEFGH]$, em centímetros cúbicos, é igual a:

$V_{[ABCDEFGH]} = V_{[ABCDI]} - V_{[EFGHI]} = 972 - 288 = 684 \text{ cm}^3$

2022, 1ª fase, caderno 1

2. Vamos começar por calcular o volume do prisma quadrangular reto:

$$V_{[ABCDEFGH]} = A_b \times h = 1,4^2 \times 1,8 = 3,528 \text{ m}^3$$

Calculando o volume da pirâmide reta com 18 metros de altura:

$$V_{[Pirâmide\ reta\ grande]} = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{1,2^2 \times 18}{3} = 8,64 \text{ m }^3$$

Calculando o volume da pirâmide reta com $18 - 4,5 = 13,5$ metros de altura e base quadrada $[NOPM]$:

$$V_{[Pirâmide\ reta\ pequena]} = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{0,9^2 \times 13,5}{3} = 3,645 \text{ m }^3$$

O volume do obelisco em metros cúbicos, arredondado às unidades é igual a:

$V_{obelisco} = V_{[ABCDEFGH]} + V_{[Pirâmide\ reta\ grande]} - V_{[Pirâmide\ reta\ pequena]} =$

$= 3,528 + 8,64 - 3,645 = 8,523 \approx 9 \text{ m }^3$

2021, 1ª fase, caderno 1

3. O futuro contentor terá o mesmo volume e a mesma altura do contentor atual logo temos que:

$V_{Futuro\ contentor} = V_{Contentor\ atual} \Leftrightarrow V_{Prisma\ quadrangular} = V_{Cilindro} + V_{Semiesfera} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A_{Quadrado} \times altura = A_{Círculo} \times altura + \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow aresta^2 \times (7,6 + 2,4) = \pi \times 2,4^2 \times 7,6 + \frac{4\pi \times (2,4)^3}{6} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow aresta^2 \times 10 = \pi \times 5,76 \times 7,6 + \frac{4\pi \times 13,824}{6} \Leftrightarrow aresta^2 = \frac{\pi \times 43,776 + \frac{4\pi \times 13,824}{6}}{10} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow aresta^2 \approx 16,65 \Leftrightarrow aresta = \pm\sqrt{16,65} \Leftrightarrow aresta_{\ (aresta>0)} \approx 4,1$ dm

2019, 1ª fase, caderno 1

4. Vamos começar por calcular o volume do cilindro:

$$V_{Cilindro} = A_b \times h = \pi \times r^2 \times h = \pi \times \left(\frac{2,4}{2}\right)^2 \times (6,4 - 2,4) \approx 18,096 \text{ m}^3$$

Sabendo que o raio da esfera é igual ao raio da base do cilindro vem que:

$$V_{Esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{2,4}{2}\right)^3 \approx 7,238 \text{ m}^3$$

De acordo com a figura o volume da cisterna é dado por:

$V_{cisterna} = V_{Cilindro} + 2 \times V_{Semiesfera} = V_{Cilindro} + V_{Esfera} \approx 18,096 + 7,238 \approx 25,334 \text{ m}^3$

O volume da cisterna é igual a $25,3 \text{ m}^3$.

2019, 2ª fase, caderno 1

5. De acordo com a figura, x corresponde à altura do prisma [ABCDEF].

Vamos calcular x, a altura do prisma:

$V_{[ABCDEF]} = A_b \times x \Leftrightarrow V_{[ABCDEF]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} \times x \Leftrightarrow 445000 = \frac{78 \times 58,5}{2} \times x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 445000 = 2281,5 \times x \Leftrightarrow x = \frac{445000}{2281,5} \Leftrightarrow x \approx 195,05$ cm

Calculando a área do painel solar, isto é, do retângulo [ACDE]:

$$A_{[ACDE]} = \overline{AE} \times \overline{DE} = 195,05 \times 97,5 \approx 19017 \text{ cm}^2$$

2019, Época especial, caderno 1

6. $V_{Prisma} = A_{base} \times altura \Leftrightarrow V_{[STUVWXYZ]} = A_{[UTSV]} \times \overline{SX} \Leftrightarrow 1250 = A_{[UTSV]} \times 15$ $\Leftrightarrow A_{[UTSV]} = \frac{1250}{15} \Leftrightarrow A_{[UTSV]} = \frac{1250}{15}$

   Como a base [UVST] do prisma é um trapézio temos que:

   $A_{[UTSV]} = \frac{1250}{15} \Leftrightarrow \frac{\overline{VS}+\overline{UT}}{2} \times \overline{UV} = \frac{1250}{15} \Leftrightarrow \frac{15+\overline{UT}}{2} \times 7 = \frac{1250}{15} \Leftrightarrow 15 + \overline{UT} = \frac{1250\times 2}{15\times 7}$ $\Leftrightarrow \overline{UT} = \frac{1250\times 2}{15\times 7} - 15 \Leftrightarrow \overline{UT} \approx 8,08$ cm

   2018, 1ª fase, caderno 1

7. De acordo com a figura temos que:

$$V_{[EFGHIJKL]} = V_{[EFGHV]} - V_{[JKLIV]}$$

   $V_{[EFGHV]} = \frac{1}{3}A_{[EFGH]} \times altura = \frac{1}{3} \times 9^2 \times 24 = 648 \text{ cm}^3$

   $V_{[JKLIV]} = \frac{1}{3}A_{[JKLI]} \times altura = \frac{1}{3} \times 3^2 \times (24 - 16) = 24 \text{ cm}^3$

   Assim, o volume do tronco de pirâmide $[EFGHIJKL]$ é:

$$V_{[EFGHIJKL]} = V_{[EFGHV]} - V_{[JKLIV]} = 648 - 24 = 624 \text{ cm}^3$$

   2018, 2ª fase, caderno 1

8. Vamos começar por determinar o diâmetro de cada um dos quatro tanques esféricos:

   $V_{Tanque\ Esf\acute{e}rico} = 33750 \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = 33750 \Leftrightarrow r^3 = \frac{3\times 33750}{4\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{101250}{4\pi}}$ $r \approx 20,05$ m

   Calculando o diâmetro D de cada um dos tanques:

$$D = 2 \times r \Leftrightarrow D \approx 2 \times 20,05 \Leftrightarrow D \approx 40,1$$

De acordo com a figura, o comprimento do compartimento onde estão colocados os quatro tanques esféricos é igual à soma dos diâmetros dos quatro tanques, logo vem que:

$$x = 4 \times d \approx 4 \times 40,1 \approx 160,4 \approx 160 \text{ m}$$

2018, Época especial, caderno 1

9. Para calcular o volume de uma pirâmide usamos a fórmula: $V_{[AFGE]} = \frac{1}{3}.A_b.h$

   $h = \overline{AF} = 9$ cm e $A_b = A_{[FGE]} = \frac{\overline{FG}.\overline{FE}}{2}$ onde $\overline{FG} = \overline{FE}$ porque o prisma [ABCDEFGH] tem bases quadradas.

   Pelo critério AA os triângulos [AFG] e [AST] são semelhantes porque $F\hat{A}G = S\hat{A}T$ e $G\hat{F}A = A\hat{S}T$ (são ambos ângulos retos).

   $$\frac{\overline{AS}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{ST}}{\overline{FG}} \Leftrightarrow \frac{6}{9} = \frac{4}{\overline{FG}} \Leftrightarrow \overline{FG} = 6 \text{ cm}$$

   $A_b = A_{[FGE]} = \frac{\overline{FG}.\overline{FE}}{2} = \frac{6\times 6}{2} = 18 \text{ cm}^2$

   Portanto, $V_{[AFGE]} = \frac{1}{3}.A_b.h = \frac{1}{3} \times 18 \times 9 = 54 \text{ cm}^3$

   2017, 1ª fase, caderno 1

10. $V_{cubo} = a^3 \Leftrightarrow 729 = a^3 \Leftrightarrow a = \sqrt{729} \Leftrightarrow a = 9$ cm

    $V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \times A_b \times h \Leftrightarrow V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \times 9^2 \times \frac{9}{2} \Leftrightarrow V_{pirâmide} = 121,5 \text{ cm}^3$

    2017, 2ª fase, caderno 1

11. Vamos começar por determinar a altura da água no reservatório, ou seja, $\overline{BP}$:

    $V_{cilindro\ sombreado} = A_{base} \times altura \Leftrightarrow 50 = \pi(\frac{4,4}{2})^2 \times \overline{BP} \Leftrightarrow 50 = \pi \times 4,84 \times \overline{BP} \Leftrightarrow$
    $\overline{BP} = \frac{50}{\pi \times 4,84} \Leftrightarrow \overline{BP} \approx 3,29$ m

De acordo com a figura vem que:

$$a = \overline{BP} + \overline{AP} + \frac{\overline{BC}}{2} \approx 3,29 + 1,5 + 2,2 \approx 7 \text{ m}$$

2017, Época especial, caderno 1

12. A diferença dos volumes do prisma e do cilindro é representada pela fórmula: $V_{Prisma} - V_{Cilindro} = A_{Quadrado} \times h - \frac{1}{3} \times A_{Círculo} \times h$

    Como a diferença dos volumes é de 3000 cm^3, vem que:

    $A_{Quadrado} \times h - \frac{1}{3} \times A_{Círculo} \times h = 3000 \Leftrightarrow 20^2 \times h - \frac{1}{3} \times 10^2\pi \times h = 3000 \Leftrightarrow h(400 - \frac{1}{3} \times 100\pi) = 3000 \Leftrightarrow h = \frac{3000}{400-\frac{1}{3}\times 100\pi} \Leftrightarrow h \approx 35$ cm

    2016, 1ª fase, caderno 1

13. Para calcularmos o volume do prisma quadrangular [ABCDEFGH] usamos a fórmula:

    $$V_{[ABCDEFGH]} = A_{[ABCD]} \times a$$

    onde $a = altura_{prisma} = altura_{cilindro} = 5,3$ cm

    Através do raio do cilindro vamos determinar a área da base quadrada do prisma: $A_{[ABCD]} = \overline{BA}^2$

    $\overline{DB} = 2 \times raio = 2 \times 3 = 6$ cm

    Consideremos o triângulo [DAB] retângulo em A, usando o teorema de pitágoras vem que:

    $$h^2 = c^2 + c^2 \Leftrightarrow 6^2 = 2\overline{BA}^2 \Leftrightarrow \frac{36}{2} = \overline{BA}^2 \Leftrightarrow \overline{BA}^2 = 18 \text{ cm}^2$$

    Assim,

    $V_{[ABCDEFGH]} = A_{[ABCD]} \times a \Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]} = 18 \times 5,3 \Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]} \approx 95 \text{ cm}^3$

    2016, 2ª fase, caderno 1

14. Vamos começar por calcular $\overline{VC}$. O triângulo [VCA] é retângulo em , logo podemos usar o Teorema de Pitágoras:

$(\overline{AV})^2 = (\overline{VC})^2 + (\overline{CA})^2 \Leftrightarrow 15^2 = (\overline{VC})^2 + 6^2 \Leftrightarrow (\overline{VC})^2 = 189 \Leftrightarrow \overline{VC} = \pm\sqrt{189}$
$\Leftrightarrow \overline{VC} = \sqrt{189}, \qquad \overline{VC} > 0$

O volume do sólido é:

$V_{sólido} = V_{cone} + V_{semiesfera} \Leftrightarrow V_{sólido} = \frac{1}{3}A_{base} \times altura + \frac{\frac{4}{3}\pi \times raio^3}{2} \Leftrightarrow V_{sólido} = \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times \sqrt{189} + \frac{\frac{4}{3}\pi \times 6^3}{2} \Leftrightarrow V_{sólido} \approx 518,277 + 452,389 \Leftrightarrow V_{sólido} \approx 971 \text{ cm}^3$

2016, Época especial, caderno 1

15. O volume total do sólido é representado pela fórmula: $V_{sólido} = V_{cilindro} + V_{semiesfera}$
$\Leftrightarrow 285 = A_{base} \times a + \frac{\frac{4}{3}\pi \times r^3}{2} \Leftrightarrow 285 = \pi 3^2 \times \overline{DA} + \frac{\frac{4}{3}\pi \times 3^3}{2} \Leftrightarrow 285 = 9\pi \times \overline{DA} + \frac{4\pi \times 27}{6}$
$\Leftrightarrow 285 - \frac{4\pi \times 27}{6} = 9\pi \times \overline{DA} \Leftrightarrow \overline{DA} = \frac{285 - \frac{4\pi \times 27}{6}}{9\pi} \Leftrightarrow \overline{DA} \approx 8,1 \text{ cm}$

2015, 1ª fase, caderno 1

16. O sólido é composto por 3 prismas quadrangulares em que 2 deles têm altura igual a e o outro tem altura igual a $\frac{2}{3} \times \overline{DE} = \frac{2}{3} \times 9 = 6$ cm. Como as bases dos 3 prismas quadrangulares são iguais entre si, a área da base de cada prisma é igual a s.

O volume do sólido total é igual à soma dos volumes dos 3 prismas quadrangulares:

$V_{sólido} = V_{[ABCDEFGH]} + V_{[LKNMHGJI]} + V_{[PQROIJTS]} \Leftrightarrow 248 = s \times 9 + s \times 6 + s \times 9$
$\Leftrightarrow 248 = 24s \Leftrightarrow s = \frac{248}{24} \Leftrightarrow s \approx 10,3 \text{ cm}^2$

2015, 2ª fase, caderno 1

17. Vamos seguir a sugestão e calcular a altura da pirâmide [EFGHI]:

$$V_{[EFGHI]} = \frac{1}{3}A_{base} \times a \Leftrightarrow 6 = \frac{1}{3} \times 3^2 \times a \Leftrightarrow 6 = 3 \times a \Leftrightarrow a = \frac{6}{3} \Leftrightarrow a = 2 \text{ cm}$$

A altura do tronco de pirâmide [ABCDEFGH] é:

$$h = \overline{IJ} - 2 = 15 - 2 = 13 \text{ cm}$$

Assim o volume do tronco da pirâmide quadrangular regular [ABCDEFGH] é:

$V_{[ABCDEFGH]} = \frac{h}{3}(L^2 + L \times l + l^2) \Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]} = \frac{13}{3}(8^2 + 8 \times 3 + 3^2) \Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]} = \frac{13}{3}(73 + 24) \Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]} = \frac{13 \times 97}{3} \Leftrightarrow V_{[ABCDEFGH]} \approx 420 \text{ cm}^3$

2015, Época especial, caderno 1