Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1ª Fase | Ensino Secundário | 2020

1.

1.1. Vamos estudar a sucessão (u_n) quanto à monotonia:

$u_{n+1} - u_n = \frac{8(n+1)-4}{n+1+1} - \frac{8n-4}{n+1} = \frac{8n+4}{n+2} - \frac{8n-4}{n+1} = \frac{(8n+4)(n+1)}{(n+2)(n+1)} - \frac{(8n-4)(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$

$= \frac{8n^2+8n+4n+4}{(n+2)(n+1)} - \frac{8n^2+16n-4n-8}{(n+2)(n+1)} = \frac{8n^2+12n+4}{(n+2)(n+1)} - \frac{8n^2+12n-8}{(n+2)(n+1)} = \frac{8n^2+12n+4-(8n^2+12n-8)}{(n+2)(n+1)} =$

$= \frac{12}{(n+2)(n+1)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Como $u_{n+1} - u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ então (u_n) é uma sucessão monótona crescente.

1.2. $\lim f(u_n) = f(\lim u_n)$

$\lim u_n = \lim \frac{8n-4}{n+1} = \lim \frac{8n}{n} = 8$

Mas como (u_n) é uma sucessão monótona crescente vem que $\lim u_n = 8^-$

Logo, $\lim f(u_n) = \lim\limits_{x \to 8^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 8^-} \log_2(8-x) = \log_2 0^+ = -\infty$

Opção(A)

2. No grupo das quatro pessoas existem ${}^4C_2$ hipóteses para exatamente duas delas escolherem o número cinco. Tendo em conta que duas das quatro pessoas já escolheram o número cinco, as outras duas pessoas só têm quatro hipóteses de escolha de entre os números: 1, 2, 3 e 4, logo o número de casos favoráveis é $4^2 \times {}^4C_2 = 96$.

O número de hipóteses posssíveis para as quatro pessoas escolherem um número de entre cinco números (1, 2, 3, 4 e 5) é igual a 5^4.

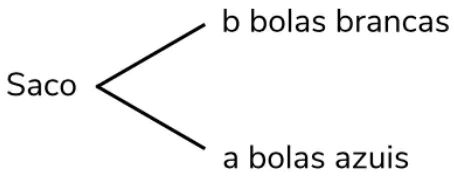
Assim, a probabilidade de exatamente duas pessoas escolherem o número 5 é igual a:

$$\frac{4^2 \times {}^4C_2}{5^4} = \frac{96}{625} = 0,1536$$

Opção(D)

3.

3.1. Inicialmente existiam a bolas azuis e b bolas brancas no saco, ou seja, no total haviam $a+b$ bolas no saco.



Consideremos os acontecimentos:

A: A primeira bola retirada é azul
B: A segunda bola retirada é branca

$P(B|A)$ é a probabilidade da segunda bola retirada do saco ser branca sabendo que a primeira bola retirada é azul.

O número de casos possíveis é igual ao número de bolas que ficaram no saco após o acontecimento A. Como foi retirada uma bola azul sem reposição ficámos com $a-1+b$ bolas no saco.

O número de casos favoráveis é igual ao número de bolas brancas que estão no saco sabendo que a primeira bola retirada é azul, ou seja, é igual a b.

Assim temos que:

$$P(B|A) = \frac{b}{a-1+b}$$

Por outro lado, também conseguimos determinar $P(B|A)$ usando a fórmula da probabilidade condicionada:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}P(A)}{P(A)} = \frac{1}{3}$$

Ficamos com a igualdade:

$$\frac{b}{a-1+b} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3b = a - 1 + b \Leftrightarrow 2b = a - 1 \Leftrightarrow a = 2b + 1$$

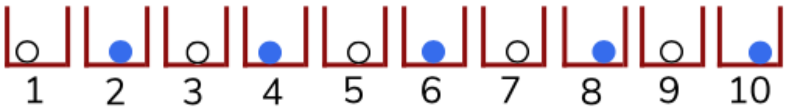
$\forall b \in \mathbb{N}, \quad 2b$ é um número par.

$\forall b \in \mathbb{N}, \quad 2b + 1$ é um número ímpar.

Logo inicialmente existia um número ímpar de bolas azuis no saco.

3.2. O saco agora tem 8 bolas azuis e sete bolas brancas.

Começamos por colocar uma bola branca em cada caixa com o número ímpar e uma bola azul em cada caixa com número par.



O saco fica com três bolas azuis e duas bolas brancas.

Como cada caixa só pode ter, no máximo, duas bolas vamos distribuir as três bolas azuis pelas dez caixas disponíveis e depois as duas bolas brancas pelas restantes sete caixas :

$$^{10}C_3 \times {}^{7}C_2 = 120 \times 21 = 2520$$

Opção(B)

4.

4.1. Vamos considerar o número complexo z na forma trigonométrica:

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Fazendo o conjugado do número complexo z:

$$\overline{z} = |z|e^{-i\theta}$$

Resolvendo a equação:

$z^2 = \overline{z} \Leftrightarrow (|z|e^{i\theta})^2 = |z|e^{-i\theta} \Leftrightarrow |z|^2 e^{i2\theta} = |z|e^{-i\theta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|^2 = |z| \ \wedge \ 2\theta = -\theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow |z|^2 - |z| = 0 \ \wedge \ 3\theta = 2k\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|(|z| - 1) = 0 \ \wedge \ \theta = \frac{2k\pi}{3} \Leftrightarrow (|z| = 0 \quad (*_1) \ \vee \ |z| - 1 = 0) \ \wedge \ \theta = \frac{2k\pi}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z| = 1 \ \wedge \ \theta = \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$(*_1)$ z é um número complexo não nulo logo $|z| \neq 0$

Como as soluções desta equação são os vértices de um polígono regular (polígono com todos os lados iguais) então $\theta \in [0, 2\pi[$.

Para $k = 0$, $z_1 = e^{i0}$ $(0 \in [0, 2\pi[)$

Para $k = 1$, $z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $\left(\frac{2\pi}{3} \in [0, 2\pi[\right)$

Para $k = 2$, $z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ $\left(\frac{4\pi}{3} \in [0, 2\pi[\right)$

Para $k = 3$, $z_4 = e^{i\frac{6\pi}{3}} = e^{i2\pi}$ $\left(2\pi \notin [0, 2\pi[\right)$

Assim temos que os afixos dos números complexos z_1, z_2 e z_3 são os vértices de um triângulo equilátero.

Sejas A o afixo do número complexo z_1 que tem coordenadas $A(1, 0)$

Escrevendo o número complexo z_2 na forma algébrica:

$$z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Seja B o afixo do número complexo z_2 que tem coordenadas $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Calculando a distância entre os pontos A e B:

$$d(AB) = \sqrt{\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

O perímetro do triângulo equilátero é:

$P_{triângulo} = 3 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

4.2. Consideremos em $\mathbb{C}$ o número complexo $z = x + iy$.

$$Re(z) \times Im(z) = 1 \;\Leftrightarrow\; x \times y = 1 \;\Leftrightarrow\; y = \tfrac{1}{x}$$

Opção(D)

5.

5.1. O ponto A pertence ao plano ABC, substituindo na equação do plano ABC os valores da abcissa e cota podemos calcular o valor da ordenada do ponto A:

$$3x + 4y + 4z - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 + 4y + 0 - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 3$$

O ponto A tem coordenadas $(0, 3, 0)$.

O ponto B também pertence ao plano ABC, substituindo na equação do plano ABC os valores da ordenada e cota podemos calcular o valor da abcissa do ponto B:

$$3x + 4y + 4z - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x + 0 + 0 - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 4$$

O ponto B tem coordenadas $(4, 0, 0)$

Pela observação da figura 1, a altura do cilindro é igual à distância entre os pontos A e B:

$$d(AB) = \sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$V_{cilíndro} = A_b \times h \;\Leftrightarrow\; 10\pi = \pi \times \overline{BC}^2 \times \overline{AB} \;\Leftrightarrow\; 10 = \overline{BC}^2 \times 5 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \overline{BC}^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; \overline{BC} = \pm\sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; \overline{BC} = \sqrt{2}, \quad \overline{BC} > 0$$

5.2. O ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P é o pé da perpendicular do ponto P com o plano ABC. Seja P' este ponto.

Vamos começar por determinar uma equação vetorial da reta PP'.

O vetor normal ao plano ABC tem coordenadas $(3, 4, 4)$ e é um vetor diretor da reta PP'.

Sabendo as coordenadas do ponto P e um vetor diretor da reta PP', uma equação vetorial desta reta é:

$$(x, y, z) = (3, 5, 6) + k(3, 4, 4), \qquad k \in \mathbb{R}$$

As coordenadas genéricas do ponto P' pertencente à reta são $(3+3k, 5+4k, 6+4k)$.

Como o ponto P' pertence ao plano ABC (ponto de interseção do plano ABC com a reta PP'), substituindo as coordenadas do ponto P' na equação do plano conseguimos calcular a constante k:

$$3x + 4y + 4z - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; 3(3 + 3k) + 4(5 + 4k) + 4(6 + 4k) - 12 = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 9 + 9k + 20 + 16k + 24 + 16k - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; 41k = -41 \;\Leftrightarrow\; k = -1$$

Substituindo $k = -1$ nas coordenadas genéricas do ponto P' conseguimos saber as coordenadas do ponto de interseção do plano ABC com a reta PP' o que corresponde às coordenadas do ponto P':

$$P'(0, 1, 2)$$

6. Sabendo o declive da reta r conseguimos calcular o ângulo OTS:

$$m = \tan(O\hat{T}S) \;\Leftrightarrow\; 2 = \tan(O\hat{T}S) \;\Leftrightarrow\; O\hat{T}S = tan^{-1}(2)$$

Determinando o valor do ângulo STU, aproximado às centésimas, da amplitude, em radianos:

$$S\hat{T}U = \pi - tan^{-1}(2) \;\Leftrightarrow\; S\hat{T}U = 2,03$$

Opção(C)

7.

7.1. $d(0) = \cos 0 + \sqrt{9 - \sin^2 0} = 1 + \sqrt{9 - 0} = 1 + 3 = 4$ cm

Temos que $\overline{BO} = 4$ cm

Calculando o comprimento da biela:

$$\overline{BO} = \overline{OM} + \overline{MB} \Leftrightarrow 4 = 1 + \overline{MB} \Leftrightarrow \overline{MB} = 3$$

Opção(B)

7.2. Considerando que $t_0 \in [0, 5]$

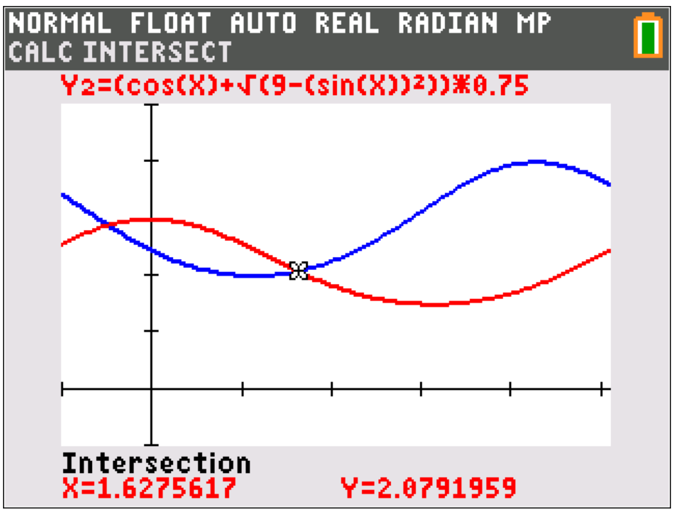
Dois segundos após o instante t_0, a distância do pistão ao ponto O diminuiu 25%, o que corresponde à equação:

$$d(t_0 + 2) = d(t_0) - d(t_0) \times 0,25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(t_0 + 2) + \sqrt{9 - \sin^2(t_0 + 2)} = (\cos t_0 + \sqrt{9 - \sin^2 t_0}) \times (1 - 0,25) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(t_0 + 2) + \sqrt{9 - \sin^2(t_0 + 2)} = (\cos t_0 + \sqrt{9 - \sin^2 t_0}) \times 0,75$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Considerando I o ponto de interseção visualizado na máquina, as suas coordenadas arredondadas às centésimas são: $I(1,63;2,08)$

A distância, arredondada às décimas, do pistão ao ponto O no instante t_0 é igual a:

$$d(1,63)=\cos(1,63)+\sqrt{9-\sin^2(1,63)}\approx 2,8 \text{ cm}$$

8. Sabendo as coordenadas de dois pontos pertencentes à reta r, $(1,a)$ e $(0,0)$, conseguimos calcular o declive da reta:

$$m=\frac{a-0}{1-0}=a$$

Assim temos a equação da reta r:

$$r: y=ax$$

A equação da circunferência de centro na origem e raio igual a 1 é:

$$x^2+y^2=1$$

Fazendo a interseção da reta r com a circunferência conseguimos determinar as coordenadas do ponto B:

$$x^2+(ax)^2=1 \Leftrightarrow x^2+a^2x^2=1 \Leftrightarrow x^2(1+a^2)=1 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{1+a^2} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{1+a^2}}$$

Observando a figura 5 sabemos que o ponto B tem abcissa positiva logo $x=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.

Opção(A)

9.

9.1. A função f só está definida em $]-\infty,2]$, logo vamos averiguar a existência de uma única assíntota oblíqua quando $x\to-\infty$.

$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+\ln(e^x+1)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x} + \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(e^x+1)}{x} =$

$= 1 + \frac{\ln(e^{-\infty}+1)}{-\infty} = 1$

$b = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to -\infty} x + \ln(e^x+1) - x = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(e^x+1) = \ln(e^{-\infty}+1) =$

$= \ln 1 = 0$

Concluímos que $f(x)$ tem uma assíntota oblíqua de equação $y = x$ quando $x \to -\infty$.

9.2. $f(x) = 2x+1 \Leftrightarrow x + \ln(e^x+1) = 2x+1 \Leftrightarrow \ln(e^x+1) = x+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x + 1 = e^{x+1} \Leftrightarrow e^x + 1 = e^x e \Leftrightarrow e^x - e^x e = -1 \Leftrightarrow e^x(1-e) = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x = -\frac{1}{1-e} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e-1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{e-1}\right) \Leftrightarrow x = \ln(e-1)^{-1} \Leftrightarrow x = -\ln(e-1)$

9.3. Consideremos a função $h(x) = f(x) - x$

$h(x) = x + \ln(e^x+1) - x = \ln(e^x+1)$

Vamos isolar a variável x:

$y = \ln(e^x+1) \Leftrightarrow e^x + 1 = e^y \Leftrightarrow e^x = e^y - 1 \Leftrightarrow x = \ln(e^y - 1)$

Assim temos que $h^{-1}(x) = \ln(e^x - 1)$

Opção(C)

10.

10.1. Calculando o valor da função g no ponto $x = 0$:

$g(0) = 0$

Calculando o valor dos limites laterais da função g no ponto $x = 0$:

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x = (*_1)$

Fazendo a mudança de variável: $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$ $\quad (y \to +\infty \;$ quando $\; x \to 0^+)$

$(*_1) = \lim\limits_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{\ln 1 - \ln y}{y^2} = -\left(\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y} \times \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{y}\right) = 0 \times 0 = 0$

(Limite notável)

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 + \frac{\sin x}{1 - e^x} = 1 + \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\sin x \times \frac{1}{1 - e^x}\right) = 1 + \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{1 - e^x}\right) =$

$= 1 + \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} \times \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{1 - e^x} = 1 + 1 \times \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{1 - e^x} = 1 + 1 \times \left(-\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{e^x - 1}\right) =$

$= 1 + 1 \times \left(-\frac{1}{\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x}}\right) = 1 + 1 \times -1 = 1 - 1 = 0$

Como $g(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$, então a função g é contínua em $x = 0$.

10.2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g no intervalo $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = (x^2 \ln x)' = 2x \ln x + \frac{1}{x} \times x^2 = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$$

Os extremos relativos de g correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$g'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x(2 \ln x + 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; 2 \ln x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; \ln x = -\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = e^{-\frac{1}{2}}$

Logo, $g'(x)$ tem um zero em $]0, +\infty[$ igual a $e^{-\frac{1}{2}}$.

$g'(e^{-1}) < 0$

$g'(e) > 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função g vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$	n.d.	-	0	+
$g(x)$	n.d.	$\searrow$	Mínimo	$\nearrow$

O gráfico de g é decrescente no intervalo $]0, e^{-\frac{1}{2}}]$ e é crescente no intervalo $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$.

$g(e^{-\frac{1}{2}}) = (e^{-\frac{1}{2}})^2 \ln(e^{-\frac{1}{2}}) = e^{-1} \times (-\frac{1}{2})\frac{1}{e} \times (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2e}$

A função g tem um mínimo relativo igual a $-\frac{1}{2e}$.