**Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A**

**Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2018**

---

**Caderno 1**

---

1.

1.1. A e B são acontecimentos equiprováveis e independentes logo temos que:

$P(A) = P(B) \quad$ e $\quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,64 = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0,64 = P(A) + P(A) - P(A) \times P(A) \Leftrightarrow -[P(A)]^2 + 2P(A) - 0,64 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ (usando a fórmula resolvente) $\Leftrightarrow P(A) = 1,6 \vee P(A) = 0,4$

Como qualquer probabilidade está sempre entre 0 e 1, $P(A) = 0,4$.

**Opção(B)**

1.2. Para determinarmos a amplitude A do oscilador harmónico temos de escrever x($t$) na forma x($t$) =A$\cos(wt + \phi)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{x}(t) &= \sqrt{2} \times \tfrac{\sqrt{2}}{2}\big(\sin(\pi t) + \cos(\pi t)\big) = \sqrt{2}\big(\tfrac{\sqrt{2}}{2} \times \sin(\pi t) + \tfrac{\sqrt{2}}{2} \times \cos(\pi t)\big) = \\
&= \sqrt{2}\big(\sin(\tfrac{\pi}{4})\sin(\pi t) + \cos(\tfrac{\pi}{4})\cos(\pi t)\big) = \sqrt{2}\big(\cos(\tfrac{\pi}{4})\cos(\pi t) + \sin(\tfrac{\pi}{4})\sin(\pi t)\big) = \\
&= \sqrt{2}\big(\cos(\pi t)\cos(\tfrac{\pi}{4}) + \sin(\pi t)\sin(\tfrac{\pi}{4})\big) = \sqrt{2}\big(\cos(\pi t - \tfrac{\pi}{4})\big) = \\
&= \sqrt{2}\big(\cos(\pi t - \tfrac{\pi}{4} + 2\pi)\big) = \sqrt{2}\big(\cos(\pi t + \tfrac{7\pi}{4})\big)
\end{aligned}$$

Logo a amplitude do oscilador é igual a $\sqrt{2}$.

**Opção(B)**

2.

2.1. Sabemos que o ponto P tem coordenadas (1,1,1).

O ponto O é a origem do referencial por isso tem coordenadas (0,0,0).

Calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$:

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (1,1,1) - (0,0,0) = (1,1,1)$$

Calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{OP} = -2(1,1,1) = (-2,-2,-2)$$

Como $Q = P + \overrightarrow{u}$, vem que:

$$Q = (1,1,1) + (-2,-2,-2) = (-1,-1,-1)$$

O ponto Q é o simétrico do ponto P em relação à origem do referencial. Como o ponto P pertence à superfície esférica então [PQ] é o diâmetro da superfície esférica.

2.2. O ponto R é o ponto de interseção da superfície esférica com o semieixo negativo das ordenadas logo as suas coordenadas são da forma (0,y,0) com y<0.

Conseguimos determinar y, substituindo as coordenadas do ponto R na equação da superfície esférica:

$$0^2 + y^2 + 0^2 = 3 \Leftrightarrow y^2 = 3 \Leftrightarrow y = -\sqrt{3} \qquad \text{(y<0)}$$

Assim sabemos que o ponto R tem coordenadas $(0, -\sqrt{3}, 0)$.

Sabendo as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e R $(0, -\sqrt{3}, 0)$ podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OR}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{OR} = R - O = (0,-\sqrt{3},0) - (0,0,0) = (0,-\sqrt{3},0)$$

$$||\overrightarrow{OR}|| = \sqrt{0^2 + (-\sqrt{3})^2 + 0^2} = \sqrt{3}$$

Com as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e $P(1,1,1)$ podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (1,1,1) - (0,0,0) = (1,1,1)$$

$$||\overrightarrow{OP}|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$\cos(\overrightarrow{OR}\,\hat{}\,\overrightarrow{OP}) = \frac{\overrightarrow{OR}.\overrightarrow{OP}}{||\overrightarrow{OR}||\times||\overrightarrow{OP}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OR}\,\hat{}\,\overrightarrow{OP}) = \frac{(0,-\sqrt{3},0).(1,1,1)}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OR}\,\hat{}\,\overrightarrow{OP}) =$

$= -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow R\hat{O}P \approx 125^o$

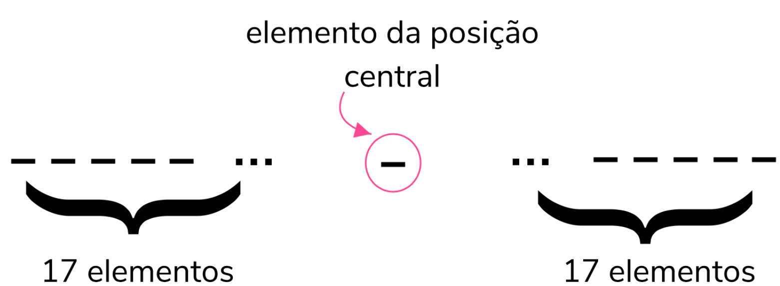
3. Tendo 5 pessoas o objectivo é formar conjuntos com pelo menos três pessoas, ou seja, podemos formar conjutos com 3 pessoas, conjuntos com 4 pessoas ou ainda conjuntos com 5 pessoas. Como a ordem de escolha das pessoas não interessa vamos usar combinações:

$$^5C_3 + {}^5C_4 + {}^5C_5 = 16$$

**Opção(D)**

4. Como a soma dos dois últimos elementos da linha do triângulo de Pascal é 35 então quer dizer que o segundo elemento (que é igual ao penúltimo) é 34. Portanto esta é a linha 34 do triângulo de Pascal.

A linha n do triângulo de pascal tem n+1 elementos, ou seja, a linha 34 tem 35 elementos.




Tendo em atenção a simetria do triângulo de pascal percebemos que esta linha tem 17 elementos iguais de cada lado do triângulo e um elemento diferente na posição central. Logo temos 17 hipóteses de escolher dois elementos iguais desta linha, ou seja, o número de casos favoráveis é 17.

O número de casos possíveis é igual a escolher dois elementos dos 35 disponíveis (em que a ordem não interessa), $^{35}C_2$.

$$P(\text{"Escolher dois elementos iguais"}) = \frac{17}{{}^{35}C_2} \approx 0,03$$

5. Sabemos que $x$ é a distância do ponto F à reta OG e $t(x)$ é o tempo, em minutos que o ascensor demora a percorrer de um ponto P de abcissa $x$ ao ponto C.

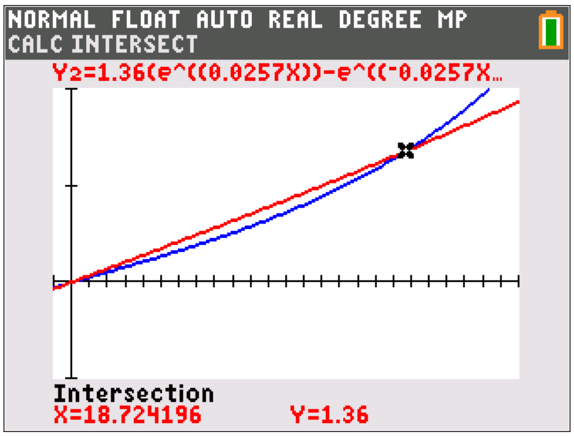
   A distância do ponto G à reta OC é igual ao triplo da distância do ponto F à mesma reta, o que corresponde à equação:

   $$x_G = 3x$$

   O tempo que o ascensor demora a percorrer o arco que vai de F até G é igual ao triplo do tempo que demora a percorrer o arco que vai de C até F, corresponde à equação:

   $$t(x_G) - t(x) = 3t(x) \;\Leftrightarrow\; t(x_G) = 4t(x) \;\Leftrightarrow\; t(3x) = 4t(x) \;\Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow\; 0,34[e^{0,0257(3x)} - e^{-0,0257(3x)}] = 4 \times 0,34(e^{0,0257x} - e^{-0,0257x}) \;\Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow\; 0,34(e^{0,0771x} - e^{-0,0771x}) = 1,36(e^{0,0257x} - e^{-0,0257x})$$

   Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:




   Considerando que $x \in [0, 96]$, temos que $x \approx 18,7$ m.

6. Sabe-se que:

   $$i^0 = 1 \quad i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1$$

   Fazendo a divisão inteira de 2018 por 4, vem que:

   Como o resto da divisão inteira de 2018 por 4 é igual a 2 então $i^{2018} = i^2$.

$$\begin{array}{r|l} 2018 & 4 \\ \hline 2 & 504 \end{array}$$

Observando o esquema abaixo percebemos que a soma de quatro em quatro parcelas é igual a zero.

$$\underbrace{\overset{1}{i^0} + \overset{i}{i^1} + \overset{-1}{i^2} + \overset{-i}{i^3}}_{0} + \dots + \underbrace{\overset{1}{i^{2016}} + \overset{i}{i^{2017}} + \overset{-1}{i^{2018}}}_{i}$$

**Opção(A)**

7. Vamos estudar a sucessão $(u_n)$ quanto à monotonia:

$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1+5}{n+1+3} - \frac{n+5}{n+3} = \frac{n+6}{n+4} - \frac{n+5}{n+3} = \frac{(n+6)(n+3)}{(n+4)(n+3)} - \frac{(n+5)(n+4)}{(n+3)(n+4)} =$
$= \frac{n^2+3n+6n+18}{(n+4)(n+3)} - \frac{n^2+4n+5n+20}{(n+3)(n+4)} = \frac{n^2+9n+18}{(n+4)(n+3)} - \frac{n^2+9n+20}{(n+3)(n+4)} = \frac{n^2+9n+18-(n^2+9n+20)}{(n+3)(n+4)} =$
$= -\frac{2}{(n+3)(n+4)} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Como $u_{n+1} - u_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ então $(u_n)$ é uma sucessão monótona decrescente.

8. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,6 + 0,7 - P(A \cap B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 1,3 - P(A \cap B)$

Qualquer probabilidade está sempre entre 0 e 1 por isso temos que:

$$0 \leq P(A \cup B) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1,3 - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow -1,3 \leq -P(A \cap B) \leq -0,3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,3 \leq P(A \cap B) \leq 1,3 \Leftrightarrow P(A \cap B) \geq 0,3$$

Pela definição de probabilidade condicionada temos que:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B|A) \geq \frac{0,3}{0,6} \Leftrightarrow P(B|A) \geq 0,5 \Leftrightarrow P(B|A) \geq \frac{1}{2}$$

9. Através da equação reduzida da reta r conseguimos determinar o declive da reta r:

$$ax + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2y = -ax - 1 \Leftrightarrow y = \frac{-ax-1}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{a}{2}x - \frac{1}{2}$$

Assim $m_r = -\frac{a}{2}$.

Da equação vetorial da reta s conseguimos saber as coordenadas do vetor diretor $\overrightarrow{u}(a, 2a)$.

Logo o declive da reta s é : $m_s = \frac{2a}{a} = 2$

Como as duas retas são paralelas então têm o mesmo declive, assim vem que:

$$m_r = m_s \Leftrightarrow -\frac{a}{2} = 2 \Leftrightarrow a = -4$$

**Opção(A)**

## Caderno 2

10.

10.1. O plano $\alpha$ tem equação $3x - 2z - 3 = 0$, logo o vetor $\vec{u}\ (3, 0, -2)$ é um vetor perpendicular ao plano $\alpha$.

A reta r é definida pela condição:

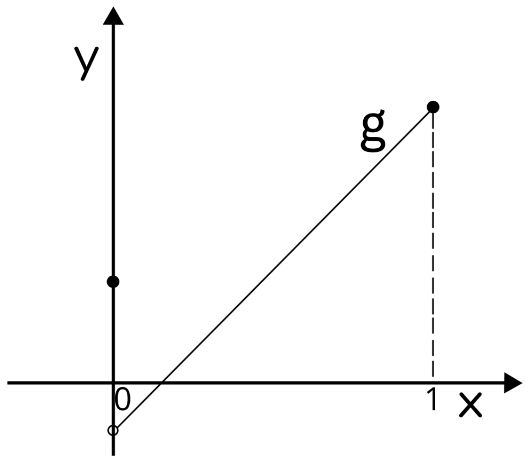
$$\frac{x-1}{2} = \frac{3-y}{5} = \frac{z}{3} \ \Leftrightarrow \ \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z}{3}$$

Portanto o vetor $\vec{v}\ (2, -5, 3)$ é um vetor diretor da reta r.

Se o plano $\alpha$ for paralelo à reta r então o vetor $(3, 0, -2)$ é perpendicular ao vetor $(2, -5, 3)$, ou seja, $(3, 0, -2).(2, -5, 3) = 0$.

Como $(3, 0, -2).(2, -5, 3) = 6 + 0 - 6 = 0$ então o plano $\alpha$ é paralelo à reta r.

**Opção(D)**




10.2. Conseguimos representar uma função $g$ com domínio $D = [0,1]$ que não tem mínimo mas que tem um zero, tem máximo e é limitada:

**Opção(D)**

11. Vamos resolver a equação complexa:

$$z^4 + 16 = 0 \;\Leftrightarrow\; z^4 = -16 \;\Leftrightarrow\; z^4 = 16\,e^{i\pi}_{(-16 = e^{i\pi})} \;\Leftrightarrow\; (r\,e^{i\alpha})^4 = 16\,e^{i\pi} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; r^4 e^{i(4\alpha)} = 16e^{i\pi} \;\Leftrightarrow\; r = \sqrt[4]{16} \;\wedge\; 4\alpha = \pi + 2k\pi,\;\; k \in \{0,1,2,3\} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; r = 2 \;\wedge\; \alpha = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{k\pi}{2},\;\; k \in \{0,1,2,3\}$$

Para $k = 0,\;\; \alpha = \frac{\pi}{4}\;\; \in 1^{\text{o}}$ quadrante

Para $k = 1,\;\; \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}\;\; \in 2^{\text{o}}$ quadrante

Para $k = 2,\; \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}\;\; \in 3^{\text{o}}$ quadrante

Para $k = 3,\; \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}\;\; \in 4^{\text{o}}$ quadrante

As soluções da equação complexa são $\{2e^{i\frac{\pi}{4}},\, 2e^{i\frac{3\pi}{4}},\, 2e^{i\frac{5\pi}{4}},\, 2e^{i\frac{7\pi}{4}}\}$.

Os elementos do conjunto A são todas as soluções da equação complexa tais que a parte real é negativa (ou seja, são os números complexos que pertencem ao 2º e 3º quadrantes).

Assim os elementos do conjunto A são: $\{2e^{i\frac{3\pi}{4}},\, 2e^{i\frac{5\pi}{4}}\}$

Apresentar os elementos do conjunto A na forma algébrica:

$2e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}) = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

12.

12.1. $X$: "Produto dos números saídos nos três lançamentos".

Seja $n$ o número de faces do dado cúbico numeradas com o número 1.

Se $X = 1$, então nos três lançamentos saiu sempre uma das faces numeradas com o número 1 logo temos que:

$$P(X=1) = \frac{n}{6} \times \frac{n}{6} \times \frac{n}{6} = \frac{n^3}{216}$$

Da tabela de distribuição de probabilidades da variável $X$, vem que:

$$P(X=1) = \frac{8}{27} \;\Leftrightarrow\; \frac{n^3}{216} = \frac{8}{27} \;\Leftrightarrow\; n^3 = \frac{216\times 8}{27} \;\Leftrightarrow\; n = \sqrt[3]{64} \;\Leftrightarrow\; n = 4$$

**Opção(C)**

12.2. $\lim(\frac{n+2}{n+1})^{2n} = \lim\left[\left(\frac{n(1+\frac{2}{n})}{n(1+\frac{1}{n})}\right)^n\right]^2 = \lim\left[\frac{(1+\frac{2}{n})^n}{(1+\frac{1}{n})^n}\right]^2 = \left[\frac{\lim(1+\frac{2}{n})^n}{\lim(1+\frac{1}{n})^n}\right]^2 = \left(\frac{e^2}{e}\right)^2 = e^2$

**Opção(C)**

13. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função $f$:

$f'(x) = (x^3 + 6\ln x)' = 3x^2 + \frac{6}{x}$

Calculando a expressão algébrica da segunda derivada da função $f$:

$f''(x) = (3x^2 + \frac{6}{x})' = 6x - \frac{6}{x^2} = 6(x - \frac{1}{x^2})$

Os pontos de inflexão correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 6(x - \frac{1}{x^2}) = 0 \;\Leftrightarrow\; x - \frac{1}{x^2} = 0 \wedge x^2 \neq 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{x^2} \wedge x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 = 1 \wedge x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1 \wedge x \neq 0$

Logo, $f''(x)$ tem um zero em $x = 1$.

$f''(\frac{1}{2}) = \frac{6}{2} - \frac{6}{(\frac{1}{2})^2} = 3 - \frac{6}{\frac{1}{4}} = 3 - 24 = -21 < 0$

$f''(2) = 6 \times 2 - \frac{6}{2^2} = 12 - \frac{6}{4} = 12 - \frac{3}{2} = \frac{21}{2} > 0$

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

| $x$ | 0 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | n.d | - | 0 | + |
| $f(x)$ | n.d | $\frown$ | P.I. | $\smile$ |

O gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]0, 1]$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[1, +\infty[$.

$f(1) = 1^3 + 6\ln 1 = 1 + 0 = 1$

A função $f$ tem um ponto de inflexão de coordenadas $(1, 1)$.

14.

14.1. Calculando o valor da função $h$ no ponto $x = 0$:

$h(0) = \frac{e^0}{0+1} = 1$

Calculando o valor dos limites laterais da função $h$ no ponto $x = 0$:

► $\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x+1} = \frac{e^0}{0+1} = 1$

▶ $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 x}{\sin x^2} = \lim\limits_{x\to 0^-} [\frac{\sin^2 x}{1} \times \frac{1}{\sin x^2}] = \lim\limits_{x\to 0^-} [\frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{x^2}{\sin x^2}] =$
$= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2}{\sin x^2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} \times \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x^2}{x^2}} =$
$= 1 \times 1 \times \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{\sin y}{y}} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$

Como $h(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$, então a função $h$ é contínua em $x = 0$.

14.2.
- A função $h$ é contínua em $[-\frac{\pi}{3}, 0[$ pois resulta do quociente entre funções trignométricas que são contínuas.
- Da alínea anterior resolta que a função $h$ é contínua em $x = 0$.
- A função $h$ é contínua em $[-\frac{\pi}{3}, +\infty[$ pois resulta do quociente entre uma função exponencial e uma polinomial que são contínuas.

Assim a função $h$ é uma função contínua no seu domínio ($D_h = [-\frac{\pi}{3}, +\infty[$).

Vamos verificar se existem assíntotas não verticais:

A função $h$ só está definida em $[-\frac{\pi}{3}, +\infty[$, logo só temos de averiguar a existência de uma única assíntota não vertical quando $x \to +\infty$.

$m = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{e^x}{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} =$
$= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} \times \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = +\infty \times \frac{1}{1+\frac{1}{+\infty}} = +\infty \times 1 = +\infty$

Como $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty$ concluímos que $h(x)$ não tem assíntotas não verticais.

14.3. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função $h$ no intervalo $[0, +\infty[$:

$$h'(x) = \left(\frac{e^x}{x+1}\right)' = \frac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2} = \frac{e^x(x+1-1)}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

Os extremos relativos de $h$ correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{xe^x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \ \wedge \ (x+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ e^x = 0 \ _{Cond. impossível} \ x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ e^x = 0 \ _{Cond. impossível} \ x \neq -1$

$x = 0$ é um zero da função $h'(x)$ no intervalo $[0, +\infty[$.

$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad h'(x) > 0$, logo a função $h(x)$ é estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

**Opção(B)**

15. Calculando os valores que a função $f$ toma nos extremos do domínio:

$f(-\frac{\pi}{6}) = \cos -\frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f(\frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

Vamos estudar a monotonia da função $f$ no domínio $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$:

| $x$ | $-\frac{\pi}{6}$ | | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $\frac{1}{2}$ |

Assim sabemos que o menor valor que a função $f$ tem no intervalo $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ é $\frac{1}{2}$ e o maior valor que a função $f$ tem no intervalo $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ é 1. Portanto o contradomínio da função $f$ é $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

**Opção(C)**

16. A equação vetorial da reta $r$ (função afim) é $y = mx$.

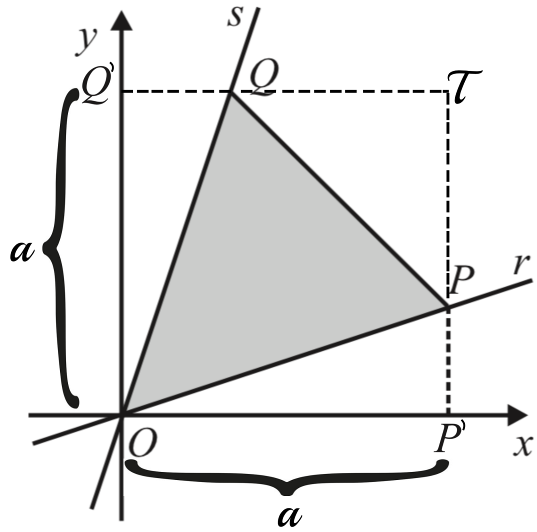
De acordo com a figura 4 o ponto $P$ tem abcissa igual a $a$, substituindo na equação da reta $r$ sabemos que o ponto $P$ tem coordenadas $(a, ma)$.

Da mesma forma a equação vetorial da reta $s$ (função afim) é: $y = \frac{1}{m}x$.

Como $\overline{OP} = \overline{OQ}$ então o ponto $Q$ tem ordenada igual a $a$, substituindo na equação da reta $s$ sabemos que o ponto $Q$ tem coordenadas $(ma, a)$.

Vamos considerar dois pontos $P'$ e $Q'$, sendo o primeiro ponto $P'$ o pé da perpendicular do ponto $P$ com o eixo Ox e o ponto $Q'$ o pé da perpendicular do ponto $Q$ com o eixo Oy.

Seja $T$ o ponto de coordenadas $(a, a)$.




Observando a figura acima concluimos que:

$$A_{[OPQ]} = A_{[Q'OP'T]} - 2A_{[OPP']} - A_{[QPT]} = a^2 - 2 \times \frac{a \times am}{2} - \frac{(a-ma)^2}{2} =$$
$$= a^2 - \frac{2a^2m}{2} - \frac{a^2-2a^2m+m^2a^2}{2} = \frac{2a^2-2a^2m-a^2+2a^2m-m^2a^2}{2} = \frac{a^2-m^2a^2}{2} = \frac{a^2}{2}(1-m^2)$$