**Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A**

**Prova 635 | 2ª Fase | Ensino Secundário | 2021**

1.

1.1. A superfície esférica de centro no ponto $R$ e que passa no ponto $Q$ tem raio igual a $\overline{RQ}$. Vamos calcular a distância entre os pontos $R$ e $Q$:

$$d(RQ) = \sqrt{(-5-(-2))^2+(5-1)^2+(-3-1)^2} = \sqrt{41}$$

A superfície esférica de centro no ponto $\mathbb{R}$ e que passa no ponto $\mathbb{Q}$ tem equação:

$$(x+5)^2+(y-5)^2+(z+3)^2 = 41$$

**Opção(C)**

1.2. Um dos vetores normais ao plano perpendicular à reta $RS$ é o vetor $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2,1,1)-(1,-1,2) = (-3,2,-1)$$

Assim a equação do plano é da forma: $-3x+2y-z+d=0$.

Como o ponto P pertence ao plano, substituindo as coordenadas do ponto P na equação do plano, conseguimos determinar a constante $d$:

$$-3x+2y-z+d=0 \;\Leftrightarrow\; -3\times 1+2\times(-1)-2+d=0 \;\Leftrightarrow\; d=7$$

Uma equação do plano perpendicular à reta $RS$ e que passa no ponto $P$ é $-3x+2y-z+7=0$.

2. $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow -\cos\alpha = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{5}$

Através da fórmula fundamental da trigonometria conseguimos calcular $\sin\alpha$:

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^2+\sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1-\frac{1}{25} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{24}{25} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{24}}{5}$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então $\sin\alpha = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} = 2\sqrt{6}$

Vamos calcular o valor da expressão $\tan(\pi-\alpha)+2\cos\left(-\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)$:

$\tan(\pi-\alpha)+2\cos\left(-\frac{7\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha+2\cos\left(-\frac{8\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\alpha\right) =$
$= -\tan\alpha+2\cos\left(-4\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha+2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) =$
$= -\tan\alpha-2\sin\alpha = -2\sqrt{6}-2\times\frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{-10\sqrt{6}-4\sqrt{6}}{5} = -\frac{14\sqrt{6}}{5}$

3.

3.1. O valor, arredondado às centésimas, da probabilidade de cada um dos dois conjuntos ficar com três raquetes de badmínton e três raquetes de ténis é igual a:

$$\frac{{}^6C_3\times{}^6C_3}{{}^{12}C_6}\approx 0,43$$

**Opção(B)**

3.2. Consideremos os acontecimentos:

M: O sócio é mulher
B: O sócio pratica badmínton

$P(M)$ é a probabilidade do sócio, selecionado ao acaso, ser mulher que é igual a 0,65.

$P(B|\overline{M})$ é a probabilidade do sócio praticar badmínton sabendo que é homem que é igual a $\frac{1}{7}$.

$P(M|B)$ é a probabilidade do sócio ser mulher sabendo que pratica badmínton que é igual a $\frac{5}{6}$.

Queremos determinar $P(M\cap\overline{B})$ que é probabilidade de o sócio escolhido ser uma mulher que praica ténis.

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$P(B|\overline{M}) = \frac{P(B\cap\overline{M})}{P(\overline{M})} \Leftrightarrow \frac{1}{7} = \frac{P(B\cap\overline{M})}{0{,}35} \Leftrightarrow P(B\cap\overline{M}) = 0,05$

| | $B$ | $\overline{B}$ | |
|---|---|---|---|
| $M$ | | | $0,65$ |
| $\overline{M}$ | $0,05$ | $0,3$ | $0,35$ |
| | | | $1$ |

De acordo com a tabela acima, temos que:

$P(B) = P(M \cap B) + P(\overline{M} \cap B)$

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$P(M|B) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow \frac{5}{6} = \frac{P(M \cap B)}{P(M \cap B)+P(\overline{M} \cap B)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6P(M \cap B) = 5P(M \cap B) + 5P(\overline{M} \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(M \cap B) = 5P(\overline{M} \cap B) \Leftrightarrow P(M \cap B) = 5 \times 0,05 \Leftrightarrow P(M \cap B) = 0,25$

A probabilidade de o sócio escolhido ser uma mulher que pratica ténis é igual a:

$$P(M \cap \overline{B}) = 0,65 - 0,25 = 0,40 = 40\%$$

4. O número de triângulos que é possivel formar escolhendo dois vértices da reta $r$ e um vértice da reta $s$ é igual a ${}^5C_2 \times {}^nC_1$.

   O número de triângulos que é possivel formar escolhendo um vértice da reta $r$ e dois vértices da reta $s$ é igual a ${}^5C_1 \times {}^nC_2$.

   Assim, o número de triângulos total que é possivel formar é igual a ${}^5C_2 \times {}^nC_1 + {}^5C_1 \times {}^nC_2$.

   Sabendo que é possível definir exatamente 175 triângulos ficamos com a equação:

   $${}^5C_2 \times {}^nC_1 + {}^5C_1 \times {}^nC_2 = 175$$

   Resolvendo a equação conseguimos determinar $n$:

$^5C_1 \times {}^nC_2 + {}^nC_1 \times {}^5C_2 = 175 \Leftrightarrow 5 \times {}^nC_2 + n \times 10 = 175 \Leftrightarrow 5 \times \frac{n!}{2!(n-2)!} + 10n = 175 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5 \times \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} + 10n = 175 \Leftrightarrow 5 \times \frac{n(n-1)}{2} + 10n = 175 \Leftrightarrow 5 \times \frac{n^2-n}{2} + 10n = 175 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5n^2-5n}{2} + \frac{20n}{2} = \frac{350}{2} \Leftrightarrow 5n^2 + 15n - 375 = 0 \Leftrightarrow n = 7 \quad \vee \quad n = -10$

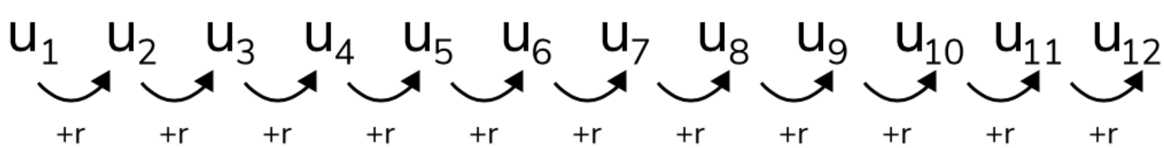
Como $n$ é o número de pontos assinalados na reta s tem de ser positivo, logo $n = 7$.

5. $\lim v_n = \lim 2 - \frac{5}{n+3} = 2 - 0^+ = 2^-$

   Pela observação do gráfico sabemos que, $\lim g(v_n) = g(\lim v_n) = g(2^-) = 1$

   **Opção(B)**

6. Seja $(u_n)$ uma progressão aritmética.




Sabemos que:

$$\begin{cases} u_6 + u_{20} = -5 \\ u_{19} = 4u_7 \end{cases}$$

Como $(u_n)$ é uma progressão aritmética conseguimos escrever qualquer termo da sucessão em função do primeiro termo $u_1$ e da razão $r$:

$u_6 = u_1 + 5r$
$u_{20} = u_1 + 19r$
$u_{19} = u_1 + 18r$
$u_7 = u_1 + 6r$

Resolvendo o sistema conseguimos determinar o primeiro termo e a razão da progressão aritmética:

$$\begin{cases} u_6 + u_{20} = -5 \\ u_{19} = 4u_7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 5r + u_1 + 19r = -5 \\ u_1 + 18r = 4(u_1 + 6r) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 24r = -5 \\ -3u_1 = 6r \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 24r = -5 \\ u_1 = -2r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2r) + 24r = -5 \\ \rule{2em}{0.4pt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{4} \\ u_1 = -2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{4} \\ u_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sabendo o primeiro termo e a razão conseguimos determinar $u_{16}$:

$$u_{16} = u_1 + 15r = \tfrac{1}{2} + 15 \times \left(-\tfrac{1}{4}\right) = -\tfrac{13}{4}$$

A soma dos dezasseis primeiros termos desta progressão é igual a:

$$S_{16} = \tfrac{u_1 + u_{16}}{2} \times 16 = \tfrac{\frac{1}{2} - \frac{13}{4}}{2} \times 16 = -22$$

7. Vamos começar por escrever o número complexo $i$ na forma trigonométrica:

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Calculando o número complexo $w$ na forma trigonométrica:

$z \times w = i \Leftrightarrow e^{i\frac{3\pi}{5}} \times w = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow w = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{3\pi}{5}}} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{5}\right)} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{10}}$

$arg(w) = -\frac{\pi}{10} \Leftrightarrow arg(w) = -\frac{\pi}{10} + 2\pi \Leftrightarrow arg(w) = \frac{19\pi}{10}$

**Opção(A)**

8. Considerando $z = x + yi$ vamos determinar a equação da reta:

$(1 - 2i)z + (1 - 2i)\overline{z} + 10 = 0 \Leftrightarrow (1 - 2i)(x + yi) + (1 - 2i)(x - yi) + 10 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + yi + 2xi - 2y + x - yi - 2xi - 2y + 10 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4y + 10 = 0 \Leftrightarrow 4y = 2x + 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$

O número complexo cujos afixos pertencem a esta reta e que tem menor módulo é o número complexo mais proximo da origem do referencial, ou seja, é o ponto resultante da interseção da reta $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$ com a reta perpendicular a esta e que passa na origem do referencial.

Vamos calcular o declive da reta perpendicular à reta $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$ e que passa na origem do referencial:

$$m = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

Assim sabemos que a reta perpendicular à reta $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$ e que passa na origem do referencial tem equação:

$$y = -2x$$

Através de um sistema conseguimos calcular as coordenadas do ponto resultante da interseção das duas retas:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x = x + 5 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

O número complexo cujos afixos pertencem à reta $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$ e que tem menor módulo é $-1 + 2i$.

9.

9.1. Vamos verificar a existência de assíntotas horizontais do gráfico da função $f$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} - \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 1 - \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x} \quad (*_1)$$

Fazendo a mudança de variável: $y = -x$ $\;(y \to +\infty$ quando $x \to -\infty)$

$$(*_1) = 1 - \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{-y} = 1 + \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} \quad = +\infty \text{ (Limite notável)}$$

Não existe assíntota horizontal do gráfico de $f$ quando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(x+1)^2}} - 3 = \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{(x+1)^2}} - 3 =$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2}} - 3 = \sqrt{1} - 3 = -2$$

Concluímos que a reta $y = -2$ é assíntota horizontal do gráfico de $f$ quando $x \to +\infty$.

9.2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função $f$ para $x \in ]-\infty, 0[$:

$$f'(x) = (\frac{x-e^{-x}}{x})' = \frac{(1+e^{-x})x-(x-e^{-x})}{x^2} = \frac{x+xe^{-x}-x+e^{-x}}{x^2} = \frac{e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de abcissa $-2$ é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$m = f'(-2) = \frac{e^2(-2+1)}{(-2)^2} = -\frac{e^2}{4}$

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de abcissa $-2$ é da forma:

$$y = -\frac{e^2}{4}x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto $(-2, f(-2))$ (que pertence à reta) na equação da reta tangente, conseguimos determinar a constante $b$:

$y = -\frac{e^2}{4}x + b \;\Leftrightarrow\; f(-2) = -\frac{e^2}{4} \times (-2) + b \;\Leftrightarrow\; \frac{-2-e^2}{-2} = \frac{e^2}{2} + b \;\Leftrightarrow\; \frac{2+e^2}{2} = \frac{e^2}{2} + b$
$\Leftrightarrow\; b = \frac{2+e^2-e^2}{2} \;\Leftrightarrow b = 1$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de abcissa $-2$ é:

$$y = -\frac{e^2}{4}x + 1$$

10. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função $h$ de domínio $[0, \frac{\pi}{2}[$:

$h'(x) = (\sin x + \cos^2 x)' = \cos x + 2\cos x \times (-\sin x) = \cos x - 2\cos x \sin x =$
$= \cos x(1 - 2\sin x)$

Os extremos relativos de $h$ correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 1 - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \vee \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, $x = \frac{\pi}{2} \notin [0, \frac{\pi}{2}[ \vee x = \frac{\pi}{6} \in [0, \frac{\pi}{2}[ \vee x = \frac{5\pi}{6} \notin [0, \frac{\pi}{2}[$

Para $k = -1$, $x = \frac{\pi}{2} \notin [0, \frac{\pi}{2}[ \vee x = \frac{\pi}{6} \notin [0, \frac{\pi}{2}[ \vee x = \frac{5\pi}{6} \notin [0, \frac{\pi}{2}[$

Para $k = 1$, $x = \frac{\pi}{2} \notin [0, \frac{\pi}{2}[ \vee x = \frac{\pi}{6} \notin [0, \frac{\pi}{2}[ \vee x = \frac{5\pi}{6} \notin [0, \frac{\pi}{2}[$

Logo, $h'(x)$ tem um zero em $x = \frac{\pi}{6}$.

$h'(0) = \cos 0(1 - 2\sin 0) = 1$

$h'\left(\frac{\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)(1 - 2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)) > 0$

$h'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)(1 - 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)) < 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função $h$ vamos construir um quadro de sinal:

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{6}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | 1 | + | 0 | − | n.d. |
| $h(x)$ | mínimo | $\nearrow$ | máximo | $\searrow$ | n.d. |

O gráfico de $h$ é crescente no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ e é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$h(0) = \sin 0 + \cos^2 0 = 1$

$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

A função $h$ tem um mínimo relativo igual a 1 e um máximo absoluto igual a $\frac{5}{4}$.

11.

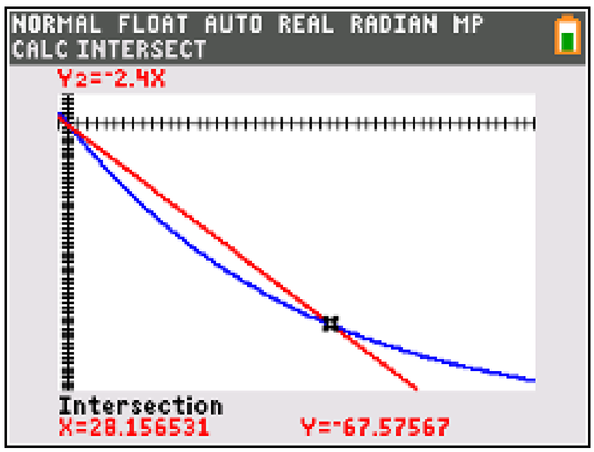
11.1. $T(t_1) = 30 \Leftrightarrow 20 + 100\, e^{-kt_1} = 30 \Leftrightarrow 100\, e^{-kt_1} = 30 - 20 \Leftrightarrow e^{-kt_1} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -kt_1 = \ln \frac{1}{10} \Leftrightarrow -kt_1 = \ln 1 - \ln 10 \Leftrightarrow k = \frac{-\ln 10}{-t_1} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 10}{t_1}$

**Opção(C)**

11.2. Durante os primeiros $t_2$ minutos, a taxa média de variação da função $T$ foi igual a $-2,4$, o que equivale à equação:

$$\frac{T(t_2)-T(0)}{t_2-0}=-2,4 \Leftrightarrow \frac{20+100\,e^{-0,04\,t_2}-120}{t_2}=-2,4 \Leftrightarrow 100\,e^{-0,04t_2}-100=-2,4t_2$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:




Considerando $I$ o ponto de interseção visualizado na máquina, as suas coordenadas arredondadas às milésimas são: $I(28,157;-67,576)$

O instante $t_2$, em minutos, com três casas decimais é igual a $28,157$, o que corresponde a 28 horas e 9 minutos.

12. Para que exista $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ temos que ter:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^-} g(x).$$

Calculando os valores do limites laterais da função $g$ no ponto $x=0$:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2+x\ln x)=2+\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x \quad (*_2)$

  Fazendo a mudança de variável: $y=\frac{1}{x}$ $(y\to +\infty$ quando $x\to 0^+)$

$(*_2) = 2 + \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{1}{y}\ln\left(\frac{1}{y}\right) = 2 + \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\ln 1 - \ln y}{y} = 2 - \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y} = 2$ (Limite notável)

- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left[\frac{x^3-x}{x^2-x} + k\right] = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x(x^2-1)}{x(x-1)} + k = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2-1}{x-1} + k = 1+k$

Calculando o valor de $k$:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x) \Leftrightarrow 2 = 1+k \Leftrightarrow k = 1.$$

.

13. Resolvendo a equação:

$x\ln(1-x) - \ln(1-x) = (1-x)\ln(3-2x) \ \wedge\ 1-x>0 \ \wedge\ 3-2x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(1-x)(x-1) = (1-x)\ln(3-2x) \ \wedge\ x<1 \ \wedge\ x<\frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\ln(1-x)(1-x) = (1-x)\ln(3-2x) \ \wedge\ x<1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(1-x)^{-1} = \ln(3-2x) \ \wedge\ 1-x\neq 0 \ \wedge\ x<1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1-x} = 3-2x \ \wedge\ x<1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1-x)(3-2x) = 1 \ \wedge\ x<1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0 \ \wedge\ x<1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \ \vee\ x=2 \ \wedge\ x<1$

C.S.$=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

14. Sabendo que a área do triângulo é igual a $k$ vem que:

$$A_{[AOB]} = k \Leftrightarrow \frac{b\times h}{2} = k \Leftrightarrow \frac{1\times\sin A\hat{O}B}{2} = k \Leftrightarrow \sin A\hat{O}B = 2k$$

Através da fórmula fundamental da trigonometria temos que:

$$\sin^2(A\hat{O}B) + \cos^2(A\hat{O}B) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(A\hat{O}B) = 1-4k^2$$

Usando a razão trigonométrica do seno conseguimos isolar a ordenada do ponto C ($Y_C$):

$\sin(180 - 3A\hat{O}B) = \frac{Y_C}{1} \Leftrightarrow \sin(3A\hat{O}B) = \frac{Y_C}{1} \Leftrightarrow Y_C = \sin(3A\hat{O}B)$ $\sin(3A\hat{O}B) =$

$\sin(2A\hat{O}B + A\hat{O}B) = \sin(2A\hat{O}B)\cos(A\hat{O}B) + \sin(A\hat{O}B)\cos(2A\hat{O}B) =$

$= 2\sin(A\hat{O}B)\cos(A\hat{O}B)\cos(A\hat{O}B) + \sin(A\hat{O}B)[\cos^2(A\hat{O}B) - \sin^2(A\hat{O}B)] =$

$= 2\sin(A\hat{O}B)\cos^2(A\hat{O}B) + \sin(A\hat{O}B)[\cos^2(A\hat{O}B) - \sin^2(A\hat{O}B)] =$

$= 2 \times 2k \times (1 - 4k^2) + 2k[1 - 4k^2 - (2k)^2] = 4k - 16k^3 + 2k - 16k^3 = 6k - 32k^3$

A ordenada do ponto C, em função de $k$, é dada por $6k - 32k^3$.

Fórmulas usadas:

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ (Não está no formulário)

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ (Está no formulário)

$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$ (Não está no formulário)

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$ (Não está no formulário)