Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1ª Fase | Ensino Secundário | 2019

Caderno 1

1.

1.1. Sabendo as coordenadas dos pontos A (2,1,0) e V $(3,-1,2)$ podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AV}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AV} = V - A = (3,-1,2) - (2,1,0) = (1,-2,2)$$

$$||\overrightarrow{AV}|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

Com as coordenadas dos pontos A (2,1,0) e C$(0,-1,2)$ podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,-1,2) - (2,1,0) = (-2,-2,2)$$

$$||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$$\cos(\overrightarrow{AV} \wedge \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AV}.\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AV}||\times||\overrightarrow{AC}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AV} \wedge \overrightarrow{AC}) = \frac{(1,-2,2).(-2,-2,2)}{3 \times 2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AV} \wedge \overrightarrow{AC}) =$$

$$= \frac{-2+4+4}{6\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AV} \wedge \overrightarrow{AC}) = \frac{6}{6\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AV} \wedge \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow V\hat{A}C \approx 55^o$$

1.2. Tendo em conta que a base da pirâmide [ABCD] é um quadrado regular, então o ponto médio de [AC] é o ponto central da base.
Calculando o ponto médio de [AC]:

$$\text{M}_{[AC]} \quad \left(\frac{2+0}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$$

Logo,

$$\text{M}_{[AC]} \ (1,0,1)$$

O vetor $\overrightarrow{MV}$ é um vetor perpendicular ao plano que contem a base da pirâmide.

Sabendo as coordenadas dos pontos M (1,0,1) e V $(3,-1,2)$ podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{MV}$:

$$\overrightarrow{MV} = V - M = (3,-1,2) - (1,0,1) = (2,-1,1)$$

Assim a equação do plano é da forma : $2x - y + z + d = 0$.

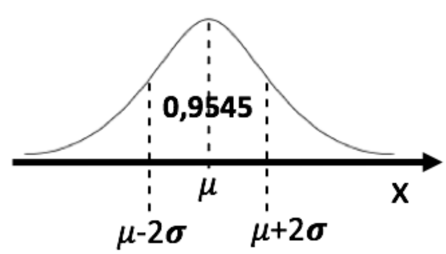
Como o ponto A pertence ao plano que contem a base da pirâmide, substituindo as coordenadas do ponto A na equação do plano conseguimos calcular a constante d:

$$2 \times 2 - 1 \times 1 + 1 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

Uma das equações do plano que contem a base da pirâmide é: $2x - y + z - 3 = 0$.

2.

2.1. Sabendo que $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$, podemos traçar o gráfico da variável X que segue uma distribuição normal :



$P(X > \mu + 2\sigma) = P(X > 5 + 2 \times \frac{1}{2}) = P(X > 6) = 1 - P(X < 6) =$
$= 1 - (0,5 + \frac{0,9545}{2}) = 1 - 0,97725 \approx 0,023.$

Opção(C)

2.2. Calculando o limite:

$$\lim \left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n} = \left[\lim \left(\frac{n}{n} - \frac{2}{n}\right)^{n}\right]^3 = \left[\lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n}\right]^3 = [e^{-2}]^3 = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

Opção(C)

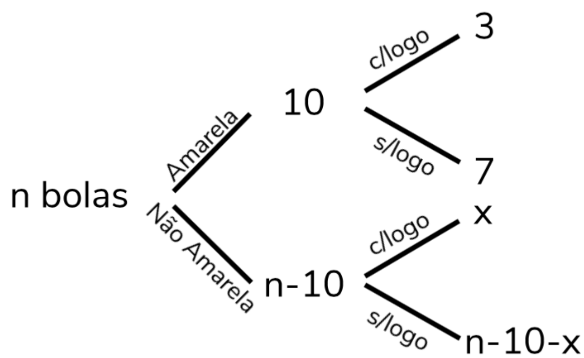
3.

3.1. Consideremos os acontecimentos:

A: "A bola retirada não é amarela"
B: "A bola retirada não tem logotipo desenhado"

Sabendo que a probabilidade de a bola retirada não ser amarela ou de não ter um logotipo desenhado é igual a $\frac{15}{16}$, vem que:

$$P(A \cup B) = \frac{15}{16}$$



Pela observação da árvore acima temos que:

$P(A) = \frac{n-10}{n}$

$P(B) = \frac{7+n-10-x}{n}$

$P(A \cap B) = \frac{n-10-x}{n}$

Logo, temos que:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{15}{16} = \frac{n-10}{n} + \frac{7+n-10-x}{n} - \frac{n-10-x}{n} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{15}{16} = \frac{n-10+7+n-10-x-n+10+x}{n} \Leftrightarrow \frac{15}{16} = \frac{n-3}{n} \Leftrightarrow 15n = 16n - 48 \Leftrightarrow n = 48$

A caixa contém 48 bolas.

3.2. Existem 8 possibilidades para dispor as 10 bolas amarelas, de modo que as bolas com o logotipo desenhado fiquem juntas:

$\underline{L}\ \underline{L}\ \underline{L}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\_ & \underline{L} & \underline{L} & \underline{L} & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \\
\_ & \_ & \underline{L} & \underline{L} & \underline{L} & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \\
\_ & \_ & \_ & \underline{L} & \underline{L} & \underline{L} & \_ & \_ & \_ & \_ \\
\_ & \_ & \_ & \_ & \underline{L} & \underline{L} & \underline{L} & \_ & \_ & \_ \\
\_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \underline{L} & \underline{L} & \underline{L} & \_ & \_ \\
\_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \underline{L} & \underline{L} & \underline{L} & \_ \\
\_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \underline{L} & \underline{L} & \underline{L}
\end{array}
$$

Tendo em conta que as bolas amarelas com o logotipo desenhado são iguais entre si e que , da mesma forma, as bolas amarelas sem o logotipo desenhado são iguais entre si então sabemos que, ao dispor as 10 bolas amarelas numa linha reta, a ordem pela qual vamos dispor as bolas com logotipo bem como a ordem pela qual vamos dispor as bolas sem logotipo não interessa.

Por isso, o número de hipóteses posssíveis para dispor as 10 bolas amarelas é igual a ${}^{10}C_3 \times {}^{7}C_7 = {}^{10}C_3$.

Assim, a probabilidade de as três bolas com o logotipo desenhado ficarem juntas é igual a $\frac{8}{{}^{10}C_3} = \frac{1}{15}$.

Opção(B)

4. Para que o número obtido com os algarismos 5,6 e 7 seja ímpar e maior do que seis milhões, então a primeira posição só pode ser ocupada pelos algarismos 6 ou 7 e a última posição só pode ser ocupada pelo algarismos 5 ou 7.

- Vamos considerar para primeira hipótese que a primeira posição é ocupada pelo algarismo 6 e a última pelo algarismo 5.

$$\underline{6}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \underline{5}$$

As restantes 5 posições podem ser ocupadas pelos algarismos 5, 6, 6, 6 e 7 o que faz ${}^{5}C_3 \times {}^{2}C_1 \times {}^{1}C_1 = 20$ hipóteses.

- Para segunda hipótese que vamos admitir que a primeira posição é ocupada pelo algarismo 6 e a última pelo algarismo 7.

$$\underline{6}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \underline{7}$$

As restantes 5 posições podem ser ocupadas pelos algarismos 5, 5, 6, 6 e 6 o que faz $^5C_3 \times {}^2C_2 \times {}^1C_1 = 10$ hipóteses.

- Em última alternativa a primeira posição é ocupada pelo algarismo 7 e a última pelo algarismo 5.

$$\underline{7}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \underline{5}$$

As restantes 5 posições podem ser ocupadas pelos algarismos 5, 6, 6, 6 e 6 o que faz $^5C_4 \times {}^1C_1 = 5$ hipóteses.

Logo, o número de números naturais de sete algarismos que se podem escrever utilizando dois algarismos 5, quatro algarismos 6 e um algarismo 7 de modo que sejam ímpares e maiores do que seis milhões é:

$$20 + 10 + 5 = 35$$

5. Sabemos que $r_1 = 7$ mm e $r_2 = 8$ mm.

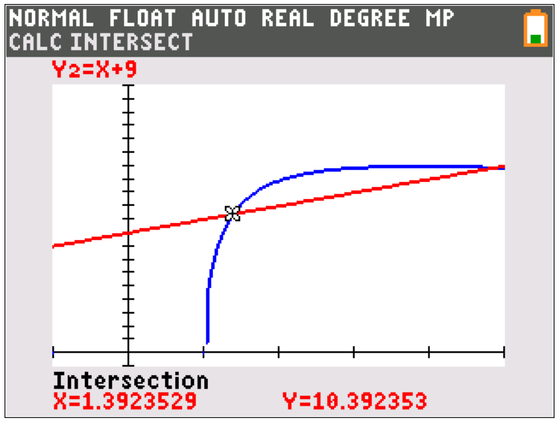
Substituindo os valores de $r_1 = 7$ e $r_2 = 8$ o diâmetro, d, da lente é dado por:

$$d(x) = \frac{\sqrt{(225-x^2)(x^2-1)}}{x}, \qquad x \in]1, \sqrt{15}[$$

O diâmetro dessa lente excede em 9 mm a distância, x, entre os centros das duas superfícies esféricas, o que corresponde à equação:

$$d(x) = x + 9 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(225-x^2)(x^2-1)}}{x} = x + 9, \qquad x \in]1, \sqrt{15}[$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:



Considerando que $x \in]1, \sqrt{15}[$, temos que $x \approx 1,4$ mm.

6. Fazendo o conjugado de z temos: $\overline{z} = -1 - 2i$.

   Ambas as partes real e imaginária de $\overline{z}$ são negativas logo o afixo de $\overline{z}$ pertence ao 3º quadrante. Como a parte real é maior que a parte imaginária então o arg(z) tem de ser maior que $\frac{5\pi}{4}$ (bissetriz dos quadrantes ímpares).

   Opção(D)

7. Vamos considerar dois termos consecutivos, a e b desta pregressão. Como a razão é maior do que um quer dizer que a progressão é crescente ou seja o valor de b é maior que a.

   Sabendo que a sua soma dos dois termos consecutivos é igual a 12 e a diferença entre o maior e o menor é igual a 3, podemos escrever um sistema de equações que permita determinar a e b:

   $$\begin{cases} a+b=12 \\ b-a=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=12-b \\ b-(12-b)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ b-12+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ 2b=15 \end{cases} \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ b=\frac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=12-\frac{15}{2} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{9}{2} \\ b=\frac{15}{2} \end{cases}$$

   Para determinar a razão de uma progressão geométrica basta fazer o quociente entre um termo com o termo anterior:

   $r = \frac{b}{a} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{30}{18} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$

8. Tendo em atenção as propriedades dos logarítmos:

$\ln(a^2 - b^2) - 2\ln(a+b) = \ln[(a+b)(a-b)] - \ln(a+b)^2 = \ln(a+b) + \ln(a-b) - \ln[(a+b)(a+b)] =$
$= \ln(a+b) + \ln(a-b) - [\ln(a+b) + \ln(a+b)] = \ln(a+b) + \ln(a-b) - \ln(a+b) - \ln(a+b) = \ln(a-b) - \ln(a+b)$

Substituindo $a + b = 2(a - b)$, vem que:

$\ln(a-b) - \ln(a+b) = \ln(a-b) - \ln[2(a-b)] =$
$= \ln(a-b) - [\ln 2 + \ln(a-b)] = \ln(a-b) - \ln 2 - \ln(a-b) = -\ln 2 \approx -0,7$

Notas:
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ (Caso notável)
$2\ln(a+b) = \ln(a+b)^2$ (Propriedade dos logarítmos)
$\ln[(a+b)(a+b)] = \ln(a+b) + \ln(a+b)$ (Propriedade dos logarítmos)

Opção(C)

Caderno 2

9.

9.1. Para determinar a interseção dos planos α, β e γ vamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=1 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\quad} \\ \underline{\qquad\quad} \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y+y+z=1 \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ \underline{\qquad\quad} \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad\quad} \\ -2y+2y+2=1 \\ \underline{\qquad\qquad\quad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\ } \\ 2=1 \\ \underline{\qquad\ } \end{cases}$$

Concluímos que o sistema é impossível pois $2 = 1$ é uma equação impossível, logo a interseção dos planos α, β e γ é o conjunto vazio.

Opção(A)

9.2. De modo a determinar $\overline{F_1F_2}$ vamos calcular o diâmetro do círculo:

$$A_{círculo} = \pi r^2 \Leftrightarrow 9\pi = \pi r^2 \Leftrightarrow r = 3, \quad (r > 0)$$

Assim sabemos que o diâmetro de círculo é igual a 6, ou seja, $\overline{F_1F_2} = 6$.

Como $\overline{F_1F_2} = 2c$ temos que $c = \frac{6}{2} = 3$.

Pela observação da figura 4, o eixo menor (constante b) é igual ao raio do círculo por isso temos $b = 3$.

Através das constantes b e c, podemos calcular a constante a^2:

$$a^2 = b^2 + c^2 = 3^2 + 3^2 = 18$$

Assim, a equação da elipse centrada na origem e com os focos sobre o eixo Ox é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Opção(A)

10. Vamos começar por simplificar e escrever o número complexo w na forma algébrica.

$$w = \frac{z_1+i^6+2\overline{z_1}}{z_1-z_2} = \frac{3+4i+i^2+2(3-4i)}{3+4i-(4+6i)} = \frac{3+4i-1+6-8i}{-1-2i} = \frac{8-4i}{-1-2i} = \frac{(8-4i)(-1+2i)}{(-1-2i)(-1+2i)} = \frac{-8+16i+4i-8i^2}{1+4} =$$

$$= \frac{20i}{5} = 4i$$

A condição $|z| = |w| \Leftrightarrow |z| = 4$ representa uma circunferência de centro na origem e raio 4.

A condição $Im(z) \geq 0$ representa o semiplano em que a parte imaginária é positiva ou igual a zero (1º e 2º quadrante) e a condição $Re(z) \geq 0$ representa o semiplano em que a parte real é positiva ou igual a zero (1º e 4º quadrante).

Assim, a interseção das três condições dá a linha da circunferência que está no 1º quadrante que é equivalente a $\frac{1}{4}$ do perímetro da circunferencia de raio 4.

Logo, $\frac{1}{4}P_{circunferência} = \frac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{1}{4} \times 2\pi \times 4 = 2\pi$

11. Resolvendo a equação trigonométrica:

$2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, $x = \frac{2\pi}{3} \notin [-\pi, 0] \vee x = \frac{4\pi}{3} \notin [-\pi, 0]$

Para $k = -1$, $x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3} \notin [-\pi, 0] \vee x = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3} \in [-\pi, 0]$

Opção(B)

12.

12.1. Seja X a variável aleatória «soma dos números saídos nos dois lançamentos»

Construindo uma tabela de dupla entrada:

	-1	1	1	1	1	1
-1	-2	0	0	0	0	0
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2
1	0	2	2	2	2	2

Assim temos que:

$P(X = 0) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

$P(X = -2) = \frac{1}{36}$

$P(X = 2) = \frac{25}{36}$

Opção(A)

12.2. $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow x(t) = 3\cos(\pi t + \frac{2\pi}{3}), \quad t \in [0, 10]$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

Opção(A)

13.

13.1. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f para $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = (\frac{x}{x-\ln x})' = \frac{x-\ln x-(1-\frac{1}{x})(x)}{(x-\ln x)^2} = \frac{x-\ln x-x+1}{(x-\ln x)^2} = \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1 é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$m = f'(1) = \frac{1-\ln 1}{(1-\ln 1)^2} = \frac{1}{1^2} = 1$

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f é da forma:

$$y = x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto $(1, f(1))$ (que pertence à reta) na equação da reta tangente, conseguimos determinar a constante b:

$y = x + b \;\Leftrightarrow\; f(1) = 1 + b \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{1-\ln 1} = 1 + b \;\Leftrightarrow \frac{1}{1} = 1 + b \;\Leftrightarrow\; 1 = 1 + b \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b = 0$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1 é:

$$y = x$$

13.2. Calculando o valor da função f no ponto $x = 0$:

$f(0) = 0$

Calculando o valor dos limites laterais da função f no ponto $x = 0$:

▶ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x-\ln x} = \frac{0}{0-\ln 0^+} = \frac{0}{-\infty} = 0$

▶ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} =$
$= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 x}{x} \times \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{1+\cos x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \sin x \times \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{1+\cos 0} =$
$= \sin 0 \times 1 \times \frac{1}{2} = 0$

Como $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, então a função f é contínua em $x = 0$.

14.

14.1. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$g'(x) = \left(\frac{e^{-x}}{x}\right)' = \frac{-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2} = \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}$$

Os extremos relativos de g correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$g'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-x}(-x-1) = 0 \;\wedge\; x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; e^{-x} = 0_{\;(cond.\ impossível)} \;\vee\; -x-1 = 0 \;\wedge\; x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-x} = 0_{\;(cond.\ impossível)}$
$\vee\; x = -1 \;\wedge\; x \neq 0$

Logo, $g'(x)$ tem um zero em $x = -1$.

$g'(-2) = \frac{e^2(2-1)}{(-2)^2} = \frac{e^2}{4} > 0$

$g'(-\frac{1}{2}) = \frac{e^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}-1)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{4}} = -\frac{\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}}{\frac{1}{4}} = -\frac{4e^{\frac{1}{2}}}{2} = -2e^{\frac{1}{2}} < 0$

$g'(1) = \frac{e^{-1}(-1-1)}{1^2} = -2e^{-1} < 0$

De modo a estudarmos a monotonia da função g vamos construir um quadro de sinal:
O gráfico de g é crescente no intervalo $]-\infty, -1]$ e é decrescente no intervalo $[-1, 0[\cup]0, +\infty[$.

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	-	n.d	-
$g(x)$	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	n.d	$\searrow$

$g(1) = \frac{e^1}{-1} = -e$

A função g tem um máximo relativo igual a $-e$.

14.2. Atendendo ao domínio da função $h(x)$, sabemos que tem assíntota oblíquoa apenas quando $x \to +\infty$.

Calculando o declive da assíntota, temos que:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^{-x}}{x}+2x-\frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x^2} + 2 - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} + 2 - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{e^{-\infty}}{(+\infty)^2} + 2 - \frac{1}{\sqrt{(+\infty)^3}} = 0 + 2 - 0 = 2$$

Opção(B)

15. Sabendo o declive da reta OB conseguimos calcular o ângulo α que essa reta faz com o eixo do x:

$$m_{OB} = \tan\alpha \ \Leftrightarrow\ \frac{4}{3} = \tan\alpha$$

Como a reta r contem a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ então sabemos que o declive da reta r é dado por:

$$m_r = \tan(\frac{\alpha}{2})$$

Utilizando a fórmula da duplicação da tangente, vem que:

$\tan\alpha = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \tan[2(\frac{\alpha}{2})] = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{2\tan(\frac{\alpha}{2})}{1-\left(\tan(\frac{\alpha}{2})\right)^2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow$ Mudança de variável $(*_1)$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{2x}{1-x^2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 6x = 4 - 4x^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 6x - 4 = 0$

$(*_1)$ Usando a fórmula resolvente temos:

$a = 4 \qquad b = 6 \qquad c = -4$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2-4\times4\times(-4)}}{2\times4} \Leftrightarrow x = \frac{-6\pm\sqrt{100}}{8} \Leftrightarrow x = \frac{-6+10}{8} \vee x = \frac{-6-10}{8}$
$\Leftrightarrow x = \frac{4}{8} \vee x = \frac{-16}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -2$

Logo temos que $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2} \vee \tan(\frac{\alpha}{2}) = -2$, mas através da figura 5 sabemos que a reta r tem declive positivo por isso $m_r = \tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2}$.

A equação reduzida da reta r é : $y = \frac{1}{2}x$.