Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época especial | Ensino Secundário | 2019

Caderno 1

1.

1.1. Através da equação do plano α, sabemos que um vetor normal a este plano tem coordenadas $(2, 3, -1)$.

Como o plano é paralelo ao plano α, o vetor $(2, 3, -1)$ é também um vetor normal do plano. Assim a equação do plano é da forma: $2x + 3y - z + d = 0$.

Sabendo que a ordenada do ponto A é igual a 4, as suas coordenadas são (x,4,z).

Como o ponto A pertence à reta r, substituindo na equação da reta r o valor da sua ordenada conseguimos calcular os valores da abcissa e da cota do ponto A através do seguinte sistema:

$$(x, 4, z) = (1, 2, 1) + k(0, 1, 5) \;\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 4 = 2 + k \\ z = 1 + 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ k = 2 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ z = 11 \end{cases}$$

Assim, o ponto A tem coordenadas $(1, 4, 11)$.

Substituindo as coordenadas do ponto A na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$2x + 3y - z + d = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 + 12 - 11 + d = 0 \;\Leftrightarrow\; d = -3$$

Logo, o plano tem equação $2x + 3y - z - 3 = 0$.

1.2. As coordenadas genéricas do ponto G pertencente à reta r são $(1, 2 + k, 1 + 5k)$.

Como o ponto G pertence ao plano α (ponto de interseção do plano α com a reta r), substituindo as coordenadas do ponto G na equação do plano α conseguimos calcular a constante k:

$2x + 3y - z - 9 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 + 3(2 + k) - (1 + 5k) - 9 = 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; 2 + 6 + 3k - 1 - 5k - 9 = 0 \;\Leftrightarrow\; -2k = 2 \;\Leftrightarrow\; k = -1$

Substituindo $k=-1$ nas coordenadas genéricas do ponto G conseguimos saber as coordenadas do ponto de interseção do plano α com a reta r:

$$\mathrm{P}(1,1,-4)$$

2.

2.1. A experiência repete-se várias vezes e de forma independente, logo a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial.

Número de repetições da experiência: $n=5$
Probabilidade de sair a face com o número 4: $p=\frac{1}{4}$
Probabilidade de não sair a face com o número 4: $q=1-p=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Usando a fórmula do modelo binomial temos:

$P($sair exatamente 3 vezes a face com o número 4$)= P(X=3)={}^5C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2\approx$
$\approx 0,016$

Opção(D)

2.2. Pela lei dos cossenos vem que:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \;\Leftrightarrow\; 8^2=4^2+5^2-2\times 4\times 5\times\cos A \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; 64=41-40\times cosA \;\Leftrightarrow\; cosA=-\frac{23}{40}$

Calculando a amplitude de α, em graus e arredondada às unidades:

$\cos\alpha=-\frac{23}{40} \;\Leftrightarrow\; \alpha=\cos^{-1}\left(-\frac{23}{40}\right) \;\Leftrightarrow\; \alpha\approx 125^o$

Opção(D)

3.

3.1. O número de casos possíveis é igual ao número de combinações da seleção de 4 dos 9 cartões do saco, ou seja, ${}^9C_4=126$.

Vamos considerar que as cartas com os números 3 e 8 já estão escolhidas, ou seja, só nos falta selecionar mais duas cartas do saco. Para o menor dos números saídos ser 3 e o maior ser 8, então quer dizer que já só podemos escolher as duas cartas que nos faltam das cartas com os números 4 a 7 (4 cartas). Portanto o número de casos favoráveis é igual a $^4C_2 = 6$.

Usando a regra de Laplace:

P("Menor dos números saídos ser 3 e o maior ser 8")$= \frac{6}{126} = \frac{1}{21}$

Opção(B)

3.2. Para as primeiras 3 posições da disposição dos nove cartões em cima de uma mesa, lado a lado, em linha reta, existem 4 hipóteses que correspondem aos 4 números primos $\{2, 3, 5, 7\}$. Como a ordem interessa (números diferentes) temos $^4A_3$ maneiras diferentes de os selecionar .

Para as restantes 6 posições, temos 6 algarismos disponíveis. Tendo em conta que os algarismos são todos diferentes e não se repetem temos $^6A_6$ maneiras diferentes de os selecionar.

Logo temos $^4A_3 \times {}^6A_6 = 17280$ maneiras diferentes para colocar os cartões, de modo que os números inscritos nos três primeiros cartões sejam primos.

4. Consideremos os acontecimentos:

R: O aluno é rapariga
Q: O aluno está matriculado na disciplina de Química

Como o número de raparigas é o dobro do número de alunos matriculados na disciplina de Química, vem que:

$$P(R) = 2P(Q)$$

Um terço dos alunos matriculados na disciplina de Química são raparigas, corresponde à equação:

$$P(R|Q) = \frac{1}{3}$$

Metade dos rapazes não estão matriculados na disciplina de Química, equivale à equação:

$$P(\overline{Q}|\overline{R}) = \frac{1}{2}$$

Sabemos que, $P(Q) = P(R \cap Q) + P(\overline{R} \cap Q)$

Usando a fórmula da probabilidade condicionada temos:

$$P(R|Q) = \frac{P(R\cap Q)}{P(Q)} \Leftrightarrow \frac{P(R\cap Q)}{P(Q)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(R \cap Q) = \frac{P(Q)}{3}$$

Da mesma forma temos:

$$P(\overline{R}|Q) = \frac{P(\overline{R}\cap Q)}{P(Q)}$$

Agora temos de relacionar $P(\overline{R} \cap Q)$ com a $P(\overline{R} \cap \overline{Q})$ de forma a conseguirmos usar a equação $P(\overline{Q}|\overline{R}) = \frac{1}{2}$:

$$P(\overline{Q}|\overline{R}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{Q}\cap\overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(\overline{Q} \cap \overline{R}) = \frac{P(\overline{R})}{2} \Leftrightarrow P(\overline{Q} \cap \overline{R}) = \frac{1-2P(Q)}{2}$$

Observando a tabela abaixo é mais fácil perceber:

	R	$\overline{R}$	
Q	$\frac{P(Q)}{3}$	$P(\overline{R} \cap Q)$	$P(Q)$
$\overline{Q}$		$\frac{1-2P(Q)}{2}$	$P(\overline{Q})$
	$P(R) = 2P(Q)$	$P(\overline{R}) = 1 - 2P(Q)$	1

$$P(\overline{R} \cap Q) = P(\overline{R}) - P(\overline{R} \cap \overline{Q}) = 1 - 2P(Q) - \left(\frac{1-2P(Q)}{2}\right) = \frac{1}{2} - P(Q)$$

Assim conseguimos determinar $P(Q)$:

$$P(Q) = P(R \cap Q) + P(\overline{R} \cap Q) \Leftrightarrow P(Q) = \frac{P(Q)}{3} + \frac{1}{2} - P(Q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6P(Q) = 2P(Q) + 3 - 6P(Q) \Leftrightarrow 10P(Q) = 3 \Leftrightarrow P(Q) = \frac{3}{10}$$

5. Como o centro do quadrado coincide com a origem do referencial, todos os pontos A, B, C e D são equidistantes da origem, o que quer dizer que os números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 têm a mesma norma.

   Os números complexos z_1 e z_3 diferem entre si 180^o, logo são simétricos por isso temos que $z_1 = -z_2$.

   Usando o raciocínio anterior também sabemos que $z_2 = -z_4$

   $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$

   Opção(A)

6. Pela observação da figura 2 concluímos que os pontos A e B têm as seguintes coordenadas:

$$\text{A}(a, \tfrac{\ln a}{a}) \qquad \text{B}(a, e^a) \qquad \text{sendo } a > 1$$

   Seja A' o pé da perpendicular do ponto A em relação ao eixo Ox.

   Vamos considerar $\overline{OA'}$ e $\overline{AB}$ a base e a altura do triângulo $[OAB]$, respetivamente.

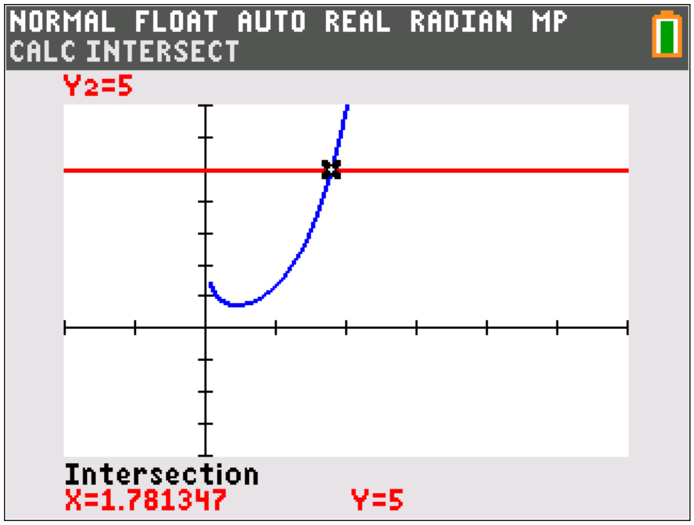
   De acordo com a figura 2, temos que:

$$\overline{AB} = e^a - \tfrac{\ln a}{a} \quad \text{e} \quad \overline{OA'} = a$$

   Sabendo que a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 5, vem que:

$$A_{[OAB]} = \tfrac{b \times h}{2} \Leftrightarrow 5 = \frac{\left(e^a - \frac{\ln a}{a}\right) \times a}{2} \Leftrightarrow 5 = \tfrac{a\, e^a - \ln a}{2}$$

Recorrendo à calculadora gráfica, vamos inserir as funções $y_1 = \frac{x\,e^x - \ln x}{2}$ e $y_2 = 5$ e calcular o seu ponto de interseção.



Tendo em conta que $a > 1$ temos que $a \approx 1,8$.

7. A sucessão $(-1)^{n+1}$ é igual a 1 quando n é ímpar e é igual a -1 quando n é par, logo podemos representar a sucessão u_n da seguinte forma:

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \\ -\frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Quando n é ímpar todos os termos da sucessão u_n são positivos portanto são maiores do que $-0,01$.

Vamos determinar a ordem a partir da qual todos os termos da sucessão u_n, quando n é par, são maiores do que $-0,01$, o que equivale a resolver a seguinte inequação:

$$-\frac{1}{n+1} > -0,01 \Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{100} > 0 \Leftrightarrow \frac{-100+n+1}{100(n+1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{n-99}{100(n+1)} > 0 \underset{(100(n+1)>0)}{\Rightarrow} n - 99 > 0$$
$$\Leftrightarrow n > 99$$

A partir da ordem 100 todos os termos da sucessão u_n são maiores do que $-0,01$.

8. Para que a função f seja contínua em $\mathbb{R}$ tem de ser contínua em $x = 1$, ou seja, temos que ter:

$$f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x).$$

Calculando o valor da função f no ponto $x = 1$:

$f(1) = k$

Calculando o valor do limite lateral da função f no ponto $x = 1$:

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$

Logo vem que, $k = \frac{1}{3}$.

Opção(C)

Caderno 2

9.

9.1. A reta r é definida por:

$$1 - x = y \wedge z = 3 \Leftrightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{y-0}{1} \wedge z = 3$$

Assim sabemos que $(-1, 1, 0)$ é um vetor diretor da reta r.

O vetor normal do plano perpendicular à reta r tem de ser colinear ao vetor diretor da reta r.

O vetor normal do plano definido na opção(B) é $(1, -1, 0)$, que é colinar ao vetor $(-1, 1, 0)$ porque $(1, -1, 0) = -(-1, 1, 0)$.

Opção(B)

9.2. Os pontos $(0, -1)$ e $(2, 0)$ são vértices da elipse, o eixo menor (constante b) é igual a 1 e o eixo maior (constante a) é igual a 2, por isso temos $a = 2$ e $b = 3$.

Através das constantes a e b, podemos calcular a constante c:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 2^2 = 1^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 3 \Leftrightarrow c = \sqrt{3} \quad \text{porque } c > 0$$

Como $\overline{F_1F_2} = 2c$, temos que $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{3}$.

Opção(B)

10. Vamos começar por simplificar e escrever o número complexo z na forma algébrica.

$w = \frac{5+(1+i)^4}{2+2i^{15}} - \frac{1}{2} = \frac{5+(1+i)^2(1+i)^2}{2+2i^3} - \frac{i}{2} = \frac{5+(1+2i+i^2)(1+2i+i^2)}{2+2(-i)} - \frac{i}{2} = \frac{5+2i\times 2i}{2-2i} - \frac{i}{2} = \frac{5+4i^2}{2-2i} - \frac{i}{2} =$
$= \frac{1}{2-2i} - \frac{i}{2} = \frac{2+2i}{(2-2i)(2+2i)} - \frac{i}{2} = \frac{2+2i}{8} - \frac{i}{2} = \frac{2+2i-4i}{8} = \frac{2-2i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

Escrevendo o número complexo z na forma trigonométrica:

$\begin{cases} tg\ \theta = -\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \\ \theta \in 4^{\text{o}} Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ \theta = -1 \\ \theta \in 4^{\text{o}} Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$ e $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Logo, $z = \frac{\sqrt{2}}{4}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Calculando z^n, vem que:

$$z^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}$$

Para que z^n seja um número real negativo temos que ter:

$$-\frac{n\pi}{4} = \pi + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\ \ \Leftrightarrow n = -4 - 8k,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0,\ \ n = -4 \notin \mathbb{N}$

Para $k = 1,\ \ n = -12 \notin \mathbb{N}$

Para $k = -1,\ \ n = 4 \in \mathbb{N}$

Assim temos que o menor número natural n para o qual z^n é um número real negativo é 4.

11. Pela definição de função composta temos que:

$$(fog)\ (x) = 7 \Leftrightarrow f(g(x)) = 7 \Leftrightarrow 2g(x) + 1 = 7 \Leftrightarrow g(x) = \frac{6}{2} \Leftrightarrow g(x) = 3$$

Opção(B)

12.

12.1. Recorrendo às Leis de Morgan temos que:

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = \frac{8}{9}$$

Como $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$, então $P(A \cap B) = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$

A e B são acontecimentos equiprováveis e independentes logo temos que:

$P(A) = P(B) \quad$ e $\quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow \frac{1}{9} = [P(A)]^2 \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3} \vee P(A) = -\frac{1}{3}$

Como qualquer probabilidade está sempre entre 0 e 1, $P(A) = \frac{1}{3}$.

Opção(C)

12.2. Calculando o limite de (u_n):

$$\lim \left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{n}{4}} = \lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{(n \times \frac{1}{4})} = \left[\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{4}} = (e^2)^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{2}}$$

Assim vem que:

$$\lim f(u_n) = f(e^{\frac{1}{2}}) = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Opção(C)

13.

13.1. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g para $x \in]-\infty, 0]$:

$$g'(x) = (x \ln(1-x))' = \ln(1-x) - \left(\frac{1}{1-x}\right)x$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa -1 é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$m = g'(-1) = \ln(1-(-1)) - \left(\frac{1}{1-(-1)}\right)(-1) = \ln 2 + \frac{1}{2}$

Opção(A)

13.2. Vamos determinar a assíntota oblíqua da função g quando $x \to +\infty$:

$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1-3x}{1-e^{-x}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-3x}{x(1-e^{-x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1-e^{-x}} \times \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-3x}{x} = \frac{1}{1-e^{-\infty}} \times \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3x}{x} =$

$= 1 \times -3 = -3$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-3x}{1-e^{-x}} + 3x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-3x+3x(1-e^{-x})}{1-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-3x+3x-3xe^{-x})}{1-e^{-x}} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-3xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-3\frac{x}{e^x}}{1-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{3}{\frac{e^x}{x}}}{1-e^{-x}} = \frac{1-\frac{3}{+\infty}}{1-e^{-\infty}} = 1$

A função g tem uma assíntota oblíqua de equação $y = -3x + 1$ quado $x \to +\infty$.

14.

14.1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(\pi-x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(\pi-x)}{2+\cos(\pi-x)}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\pi-x)}{x(2+\cos(\pi-x))} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x(2-\cos x)} =$
$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2-\cos x} = 1$

14.2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f de domínio $]0,\pi[$:

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{2+\cos x}\right)' = \frac{\cos x(2+\cos x)-(-\sin x).\sin x}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$$

Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\cos x + 1 = 0 \;\wedge\; (2+\cos x)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \cos x = -\frac{1}{2} \;\wedge\; 2+\cos x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \;\vee\; x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$,
$k \in \mathbb{Z} \wedge\; \cos x \neq -2_{\ (cond.\ universal)} \Leftrightarrow\; x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \;\vee\; x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Para $k=0$, $x=\frac{2\pi}{3} \in]0,\pi[\ \vee \ x=\frac{4\pi}{3} \notin]0,\pi[$

Para $k=-1$, $x=\frac{2\pi}{3}-2\pi=-\frac{4\pi}{3} \notin]0,\pi[\ \vee \ x=\frac{4\pi}{3}-2\pi=-\frac{2\pi}{3} \notin]0,\pi[$

Para $k=1$, $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi=\frac{8\pi}{3} \notin]0,\pi[\ \vee \ x=\frac{4\pi}{3}+2\pi=\frac{10\pi}{3} \notin]0,\pi[$

Logo, $f'(x)$ tem um zero em $x=\frac{2\pi}{3}$ no intervalo $]0,\pi[$.

$f'(\frac{\pi}{2})=\frac{2\cos\frac{\pi}{2}+1}{(2+\cos\frac{\pi}{2})^2}=\frac{1}{4}>0$

$f'(\frac{3\pi}{4})=\frac{2\cos\frac{3\pi}{4}+1}{(2+\cos\frac{3\pi}{4})^2}=\frac{-2\cos\frac{\pi}{4}+1}{(2-\cos\frac{\pi}{4})^2}=\frac{-2\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{(2-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{-\sqrt{2}+1}{(2-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}<0$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	n.d.	+	0	-	n.d.
$f(x)$	n.d.	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	n.d.

O gráfico de f é crescente no intervalo $]0,\frac{2\pi}{3}]$ e é decrescente no intervalo $[\frac{2\pi}{3},\pi[$.

$f(\frac{2\pi}{3})=\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2+\cos\frac{2\pi}{3}}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{2-\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

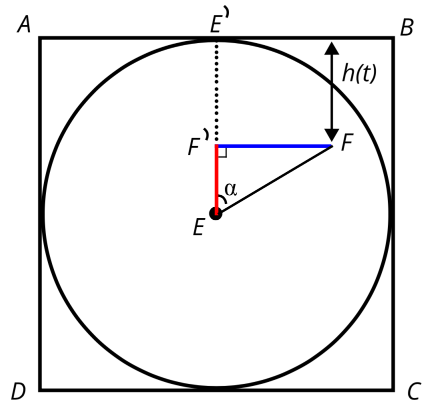
A função f tem um máximo relativo igual a $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

15. Seja E' o pé da perpendicular do ponto E com a reta AB.

Pela observação da figura 4, a distância entre o ponto E e o ponto E' é igual a metade do segmento de reta AB logo é igual a 4,5 m.

Assim temos que, $h(0)=4,5$.

Para melhor entendermos este problema vamos fazer um esquema.



Seja F' o pé da perpendicular do ponto F com a reta EE'.

A função h é da forma:

$h(t) = 4,5 - \overline{EF'}$, onde $\overline{EF'}$ é a distância entre o ponto E e o ponto F'

De modo a determinarmos $\overline{EF'}$ precisamos de saber o valor, em função da variável t, do ângulo α.

Um relógio pode ser dividido em doze setores, sendo cada setor correspondente a 1 hora, por isso vem que:

$$\alpha = \frac{360^o}{12}t \Leftrightarrow \alpha = 30^o t \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}t$$

O triângulo $[EFF']$ é retângulo em F', usando a definição de cosseno vem que:

$$\cos\alpha = \frac{c.adjacente}{hipotenusa} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{EF'}}{\overline{EF}} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \frac{\overline{EF'}}{3,5} \Leftrightarrow \overline{EF'} = 3,5\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Uma expressão analítica da função h, em função de t é:

$$h(t) = 4,5 - \overline{EF'} = 4,5 - 3,5\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$