Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2ª Fase | Ensino Secundário | 2020

1.

1.1. Através da condição que define a reta AE, sabemos que o seu vetor diretor tem coordenadas $(3, -6, 2)$.

Como o plano EFG é perpendicular à reta AE, o vetor $(3, -6, 2)$ é um vetor normal do plano. Assim a equação do plano é da forma: $3x - 6y + 2z + d = 0$.

Como o ponto G pertence ao plano AEG, substituindo as coordenadas do ponto G na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$3x - 6y + 2z + d = 0 \;\Leftrightarrow\; 3 \times 5 - 6 \times 3 + 2 \times 6 + d = 0 \;\Leftrightarrow\; d = -9$$

Logo, $AEG : 3x - 6y + 2z - 9 = 0$.

1.2. De acordo com a figura, o centro da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo é o centro do cubo que corresponde ao ponto médio da diagonal espacial do cubo.

Calculando o ponto médio da diagonal espacial do cubo:

$M_{[AG]}\left(\frac{7+5}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{4+6}{2}\right)$

$M_{[AG]}\left(6, 2, 5\right)$

Calculando o diâmetro da superfície esférica:

$d(AG) = \sqrt{(7-5)^2 + (1-3)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Determinando o raio da superfície esférica:

$$r = \frac{d(AG)}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

A equação reduzida da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo é:

$$(x-6)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=3$$

2. Para que o plano definido pelos três vértices escolhidos contenha uma das faces do cubo, esses três vértices têm de pertencer à mesma face.

   O cubo tem seis faces com quatro vértices cada uma, sendo que o número de conjuntos de três vértices que podem ser escolhidos em cada face corresponde a $6 \times {}^4C_3$ (número de casos favoráveis).

   O número de hipóteses posssíveis na escolha de três dos oito vértices do cubo é igual a ${}^8C_3$.

   A probabilidade de os três vértices escolhidos definir um plano que contem uma das faces do cubo é igual a:

   $$\frac{6 \times {}^4C_3}{{}^8C_3} = \frac{6 \times 4}{56} = \frac{3}{7}$$

   Opção(B)

3. Vamos começar por aplicar as leis de morgan:

   $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

   Assim temos que:

   $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) \;\Leftrightarrow\; 0,9 = 1 - P(A \cap B) \;\Leftrightarrow\; P(A \cap B) = 0,1$

   Logo vem que:

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,4 - 0,1 = 0,6$

   Usando a fórmula da probabilidade condicionada temos:

   $$P(A|(A \cup B)) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0,3}{0,6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

4. De foma a obtermos todos os números naturais superiores a 9999 e inferiores a 22 000 com os algarismos 0, 1, 2 e 3, vamos considerar três hipóteses.

- 1ª hipótese: Na primeira posição fica o algarismo 1 e nas restantes pode ficar qualquer outro dos quatro algarismos.

  $\underline{1}$ _ _ _ _

  Neste caso o número de maneiras diferentes que podemos dispor os números 0,1,2,e 3 é igual a 4^4.

- 2ª hipótese: Na primeira posição fica o algarismo 2, na segunda o algarismo 0 e nas restantes posições pode ficar qualquer outro dos quatro algarismos.

  $\underline{2}$ $\underline{0}$ _ _ _

  Então o número de maneiras diferentes que podemos dispor os números 0,1,2,e 3 é igual a 4^3.

- 3ª hipótese: Na primeira posição fica o algarismo 2, na segunda o algarismo 1 e nas restantes posições pode ficar qualquer outro dos quatro algarismos.

  $\underline{2}$ $\underline{1}$ _ _ _

  Logo o número de maneiras diferentes que podemos dispor os números 0,1,2,e 3 é igual a 4^3.

Considerando todos os números naturais superiores a 9999 e inferiores a 22 000, o número de maneiras diferentes que podemos dispor os números 0,1,2,e 3 é igual a:

$$4^4 + 4^3 + 4^3 = 384$$

.

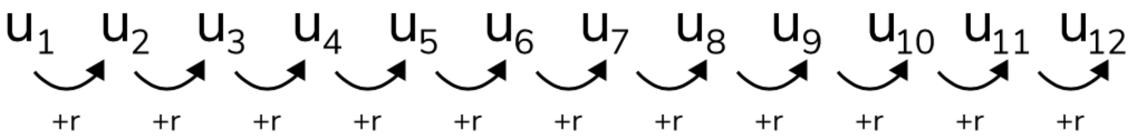
Opção(C)

5. Tendo em atenção as propriedades dos logarítmos:

$$\log_8 x + \log_8 y = \frac{1}{3} \ \Leftrightarrow \ \log_8(xy) = \frac{1}{3} \ \Leftrightarrow \ xy = 8^{\frac{1}{3}} \ \Leftrightarrow \ xy = \sqrt[3]{8} \ \Leftrightarrow \ xy = 2$$

Opção(A)

6. u_n é uma progressão aritmética de razão r:



- $u_1 = u_2 - r$
- $u_{12} = u_2 + 10r$
- $u_7 = u_2 + 5r$

Conhecendo o valor da soma dos doze primeiros termos da progressão aritmética:

$$S_{12} = \frac{u_1+u_12}{2} \times 12 \ \Leftrightarrow \ 57 = \frac{u_2-r+u_2+10r}{2} \times 12 \ \Leftrightarrow \ 57 = \frac{(2u_2+9r)\times 12}{2} \ \Leftrightarrow \ 2u_2+9r = \frac{57\times 2}{12} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ 2u_2 + 9r = \frac{19}{2} \qquad (1)$$

Sabe-se que o sétimo termo é igual ao dobro do segundo:

$$u_7 = 2u_2 \ \Leftrightarrow \ u_2 + 5r = 2u_2 \ \Leftrightarrow \ u_2 = 5r \qquad (2)$$

Resolvendo o sistema resultante das equações (1) e (2):

$$\begin{cases} 2u_2 + 9r = \frac{19}{2} \\ u_2 = 5r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10r + 9r = \frac{19}{2} \\ \rule{2cm}{0.4pt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ u_2 = 5 \times \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ u_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Logo $u_1 = u_2 - r = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$

Assim, o termo geral desta progressão aritmética é:

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r = 2 + (n-1) \times \frac{1}{2} = 2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3+n}{2}$$

Calculando a ordem do termo 500 da sucessão (u_n) :

$\mathrm{u}_n = 500 \;\Leftrightarrow\; \frac{3+n}{2} = 500 \;\Leftrightarrow\; 3+n = 1000 \;\Leftrightarrow\; n = 997$

Concluímos que 500 é o termo de ordem 997 da sucessão (u_n).

7. Calculando o limite da sucessão:

   $\lim v_n = \lim 1 + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1$

   Podemos concluir que a sucessão é convergente e tem limite não nulo, portanto as opções **A** e **B** não estão corretas.

   A sucessão v_n é monótona crescente quando $n < 10$ e é monótona decrescente quando $n > 10$, por isso v_n não é uma sucessão monótona. A opção **D** não é verdadeira.

   Opção(C)

8.

   8.1. Vamos considerar o número complexo z_2 na forma algébrica:

   $$z_2 = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}^+$$

   $|z_2| = \sqrt{5} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{5} \;\Leftrightarrow\; a^2 + b^2 = 5 \;\; (3)$

   Vamos simplificar e escrever o número complexo z_1 na forma algébrica:

   $z_1 = \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i^5} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{4}{i} = \frac{2+2i}{2} + \frac{4\times(-i)}{i\times(-i)} = 1 + i - 4i = 1 - 3i$

   $z_1 \times z_2 = (1-3i) \times (a+bi) = a + bi - 3ai - 3bi^2 = a + 3b + (b-3a)i$

   Sabendo que o afixo do numero complexo $z_1 \times z_2$ tem coordenadas iguais ficamos com a equação:

   $$a + 3b = b - 3a \;\Leftrightarrow\; 4a = -2b \;\Leftrightarrow\; 2a = -b \;\Leftrightarrow\; b = -2a \;\; (4)$$

Resolvendo o sistema resultante das equações (3) e (4):

$$\begin{cases} a^2+b^2=5 \\ b=-2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+(2a)^2=5 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+4a^2=5 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2=5 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2=1 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \vee a=-1 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$$

Como o afixo do numero complexo $z_1 \times z_2$ tem coordenadas positivas então $a+3b>0 \wedge b-3a>0$, portanto $a=-1 \wedge b=2$.

$z_2=-1+2i$

8.2. Como $k+i$ é uma das raízes quadradas do número complexo $3-4i$, vem que:

$$k+i=\sqrt{3-4i} \Leftrightarrow (k+i)^2=3-4i \Leftrightarrow k^2+2ki+i^2=3-4i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2-1+2ki=3-4i \Leftrightarrow \begin{cases} k^2-1=3 \\ 2k=-4 \end{cases} \Leftrightarrow k=-2$$

Opção(D)

9.

9.1. Considerando $r=\frac{3}{5}R$

A percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo satélite é dada por:

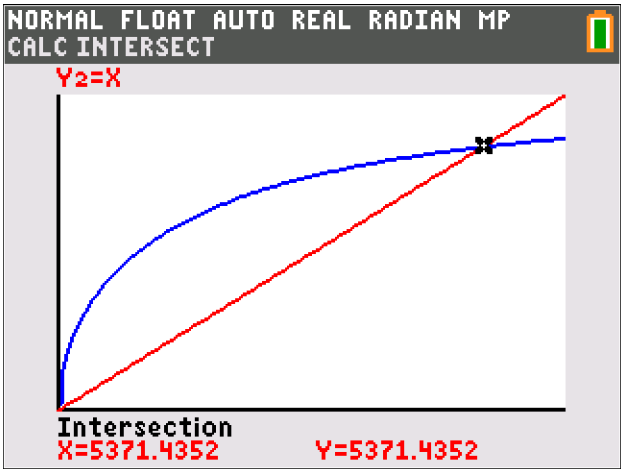
$$50\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{\frac{3}{5}R}{R}\right)^2}\right]=50\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right]=10\%$$

Opção(C)

9.2. Sabendo que o raio da Terra é 6400 km temos que:

$$r=\frac{6400}{r+6400}\sqrt{r^2+2r.6400} \Leftrightarrow r=\frac{6400}{r+6400}\sqrt{r^2+12800r}$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, conseguimos determinar a constante r:



Considerando que $r \in]0, 6400[$, temos que $r \approx 5371,44$ km.

A percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo satélite, arredondada às unidades, é:

$$50\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{5371{,}44}{6400}\right)^2}\right] \approx 23\%$$

10.

10.1. $f\,o\,g\,(x) = f(g(x)) = f(\cos x) = \cos^2 x$

O declive da reta tangente à função $f\,o\,g$ é igual à primeira derivada da função f no ponto de abcissa $\frac{\pi}{4}$ logo vem que:

$$m = (f\,o\,g)'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Determinando a primeira derivada da função $f\,o\,g$:

$$(f\,o\,g)'(x) = 2\cos x.(-\sin x) = -2\cos x.\sin x$$

Logo temos que $m = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -1$

Opção(B)

10.2. $f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; x^2 = \cos x \;\Leftrightarrow\; x^2 - \cos x = 0$

Seja h a função $h(x) = x^2 - \cos x$.

Sabemos que h é uma função contínua em $]0, \frac{\pi}{3}[$ pois resulta da diferença de duas funções contínuas, uma função quadrática e uma função trigonométrica.

- $h(0) = 0^2 - \cos 0 = -1$
- $h(\frac{\pi}{3}) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\pi^2}{9} - \frac{1}{2} \approx 0,60$

Como $h(0) < 0 < h(\frac{\pi}{3})$, pelo Teorema de Bolzano existe $a \in]0, \frac{\pi}{3}[$ tal que $h(a) = 0$. Logo a equação $f(x) = g(x)$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]0, \frac{\pi}{3}[$.

11.

11.1. Calculando o valor da função h no ponto $x = 1$:

$h(1) = 1 + e^{1-1} = 2$

Calculando o valor dos limites laterais da função h no ponto $x = 1$:

- $\lim\limits_{x\to1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to1^-} 1 + xe^{x-1} = 1 + e^{1^- - 1} = 2$
- $\lim\limits_{x\to1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{\sin(x-1)} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sin(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x-1}{\sin(x-1)(\sqrt{x}+1)} =$
  $= \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x-1}{\sin(x-1)} \times \lim\limits_{x\to1^+} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x-1}{\sin(x-1)} \times \frac{1}{2} = \;(*_1)$

Fazendo a mudança de variável: $y = x - 1$ $\quad (y \to 0^+ \quad \text{quando} \quad x \to 1^+)$

$(*_1) = \lim\limits_{y \to 0^+} \frac{y}{\sin y} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\lim\limits_{y \to 0^+} \frac{\sin y}{y}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad$ (Limite notável)

Como $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} h(x)$, então a função h não é contínua em $x = 1$.

11.2. Vamos verificar a existência de assíntotas horizontais do gráfico da função h:

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (1 + xe^{x-1}) = 1 + \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x-1} = (*_2)$

Fazendo a mudança de variável: $y = -x$ $\quad (y \to +\infty \quad \text{quando} \quad \to -\infty)$

$(*_2) = 1 + \lim\limits_{y \to +\infty} -ye^{-y-1} = 1 - \lim\limits_{y \to +\infty} ye^{-y}.e^{-1} = 1 - e^{-1} \lim\limits_{y \to +\infty} ye^{-y} =$

$= 1 - \frac{1}{e} \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = 1 - \frac{1}{e} \frac{1}{\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y}} = 1 - \frac{1}{e} \times \frac{1}{+\infty} = 1$ $\quad$ (Limite notável)

Concluímos que a reta $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de h quando $x \to -\infty$.

12.

12.1. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função f:

$f'(x) = \left(\frac{2+\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}.x - 1(2+\ln x)}{x^2} = \frac{1-2-\ln x}{x^2} = \frac{-1-\ln x}{x^2}$

Os pontos de inflexão correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$f''(x) = 0 \iff \frac{-1-\ln x}{x^2} = 0 \iff -1 - \ln x = 0 \ \wedge x^2 \neq 0 \iff$

$\iff \ln x = -1 \ \wedge x \neq 0 \iff x = e^{-1} \ \wedge x \neq 0 \iff x = \frac{1}{e} \ \wedge x \neq 0$

Logo, $f''(x)$ tem um zero em $x = \frac{1}{e}$ no intervalo $]0, +\infty[$.

$f''(1) = \frac{-1-\ln 1}{1^2} = -1 < 0$

$f''\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{-1-\ln e^{-2}}{(e^{-2})^2} = \frac{-1-(-2)}{e^{-4}} = \frac{1}{e^{-4}} = e^4 > 0$

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f''(x)$	n.d.	$+$	0	-
$f(x)$	n.d.	$\smile$	P.I.	$\frown$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]-\infty, \frac{1}{e}\right]$.

O ponto de inflexão da função f tem abcissa igual a $\frac{1}{e}$.

12.2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{(1-x)(1+x)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{(1-x)} \times \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(1+x)} = -\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{(x-1)} \times \frac{1}{2} =$

$= (*_3)$

Usando a derivada por definição temos que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{(x-1)} = f'(1) = \frac{2+\ln 1}{1} = 2$

$(*_3) = -2 \times \frac{1}{2} = -1$

Opção(B)