**Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A**

**Prova 635 | Época Especial | Versão 1 | Ensino Secundário | 2017**

## Grupo I

1. Considerando que o número formado tem de ser maior do que 20 000, a primeira posição só pode ser ocupada por um dos algarismos 2, 3 e 4, ou seja, temos 3 hipóteses para a primeira posição:

$$\underline{2}\ \_\ \_\ \_\ \_ \quad \text{ou} \quad \underline{3}\ \_\ \_\ \_\ \_ \quad \text{ou} \quad \underline{4}\ \_\ \_\ \_\ \_$$

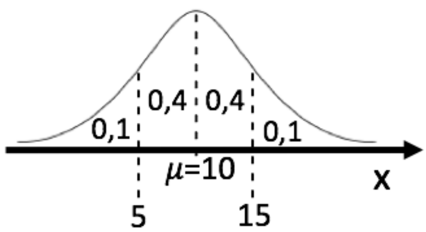
As restantes 4 posições podem ser ocupadas por qualquer dos 4 algarismos que sobram tendo em conta que não se podem repetir, portanto temos 4! hipóteses.

Logo, o número de números naturais maiores do que 20 000 e com os cinco algarismos todos diferentes que é possível formar com os algarismos de 0 a 4 é igual a:

$$3 \times 4! = 72$$

**Opção(C)**

2. Sabendo que $P(10 < X < 15) = 0,4$, podemos traçar o gráfico da variável $X$ que segue uma distribuição normal com $\mu = 10$ :




Logo, $P(X < 5 \cup X > 10) = 0,1 + 0,1 = 0,2$.

**Opção(B)**

3. Usando as propriedades dos logarítmos temos:

   $4+log_a(5^{ln\,a})=4+ln\,a\times log_a5=4+\frac{log_aa}{log_ae}\times log_a5=4+\frac{1}{log_ae}\times log_a5=4+\frac{log_a5}{log_ae}=$
   $=4+ln5=ln\,e^4+ln5=ln(5e^4)$

   **Opção(B)**

4. Através da figura 1 podemos construir um quadro de sinal de $f'(x)$ bem como de $f''(x)$ e conseguimos estudar o seu produto:

   | $x$ | $-\infty$ | -2 | | 0 | | 2 | $+\infty$ |
   |---|---|---|---|---|---|---|---|
   | $f'(x)$ | $+$ | 0 | - | - | - | 0 | $+$ |
   | $f''(x)$ | - | - | - | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
   | $f'(x)\times f''(x)$ | - | 0 | $+$ | 0 | - | 0 | $+$ |

   C.S.$=[-2,0]\cup[2,+\infty[$

   **Opção(A)**

5. Temos que:

   $(f-g)^{-1}(2)=3\ \Leftrightarrow\ (f-g)(3)=2\ \Leftrightarrow\ f(3)-g(3)=2\ \Leftrightarrow\ 4-g(3)=2\ \Leftrightarrow\ g(3)=2$

   **Opção(B)**

6. A condição $\overrightarrow{PR}.\overrightarrow{PS}=0$ significa que as retas são perpendiculares, ou seja, $R\hat{P}S$ é um ângulo reto.

   Então o conjunto A dos pontos P tais que $\overrightarrow{PR}.\overrightarrow{PS}=0$, é a circunferência de diâmetro $[RS]$.

   **Opção(D)**

7. Sabemos que $i^3z = i^2 \times iz = -iz$.

   A multiplicação de um número complexo $z$ por $i$ corresponde a uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos da imagem geométrica de $z$, ou seja, neste caso e observando a figura 2, $iz$ corresponde à imagem geométrica do ponto B.

   Como $-iz$ é o simétrico da imagem geométrica de $iz$, então $-iz$ corresponde a uma rotação de $\pi$ radianos da imagem geométrica de $iz$, logo $-iz$ corresponde à imagem geométrica do ponto D.

   **Opção(D)**

8. Como $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ então $u_n > u_{n+1}$, ou seja, a sucessão é limitada superiormente por $u_1$.

   Tendo em conta que todos os termos da sucessão são positivos então $u_n$ também é limitada inferiormente (por zero).

   **Opção(A)**

---

**Grupo II**

---

1. Vamos começar por simplificar e passar para a forma trigonométrica o número complexo $z_1$.

   O número complexo $1 - i$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares (4º quadrante) e $|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

   $z_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}cis\theta} = \frac{\sqrt{2}cis(-\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}cis\theta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}cis(-\frac{\pi}{4} - \theta) = cis(-\frac{\pi}{4} - \theta)$

   Escrevendo $w$ na forma trigonométrica temos:

   $w = \overline{z_1} \times z_1^4 = cis(\frac{\pi}{4} + \theta) \times [cis(-\frac{\pi}{4} - \theta)]^4 = cis(\frac{\pi}{4} + \theta) \times 1^4 cis(-\pi - 4\theta) = cis(\frac{\pi}{4} + \theta - \pi - 4\theta) = cis(-\frac{3\pi}{4} - 3\theta)$

   Como $\theta \in ]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}[$ vem que:

   $\frac{\pi}{12} < \theta < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} < -3\theta < -\frac{3\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} < -\frac{3\pi}{4} - 3\theta < -\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{6\pi}{4} < -\frac{3\pi}{4} - 3\theta < -\frac{9\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{6\pi}{4} < -\frac{3\pi}{4} - 3\theta < -\pi$

Como $Arg(w) \in \left]-\frac{6\pi}{4}, -\pi\right[$ então o número complexo $w$ pertence ao 2º quadrante, ou seja, $Re(w) < 0$, $Im(w) > 0$ e $|w| = 1$.

Logo o número complexo $w$ pertence ao conjunto A.

2.

2.1. Consideremos os acontecimentos:

A: As bolas retiradas da caixa $C_1$ têm a mesma cor
B: A bola retirada da caixa $C_2$ é branca

No contexto da situação descrita, $P(B|\overline{A})$ é a probabilidade da bola retirada da caixa $C_2$ ser branca sabendo que as bolas retiradas da caixa $C_1$ não têm a mesma cor.

O número de casos possíveis é igual ao número de bolas que estão na caixa $C_2$ sabendo que foram lá postas mais 2 bolas da caixa $C_1$, ou seja, na caixa $C_2$ temos $7 + 2 = 9$ bolas no total.

O número de casos favoráveis é igual ao número de bolas brancas que estão na caixa $C_2$ sabendo que foram lá postas mais 2 bolas da caixa $C_1$ de cores diferentes, ou seja, uma branca e outra preta.

Sendo $n$ o número de bolas brancas existentes na caixa $C_2$ inicialmente, então o número de casos favoráveis é igual ao número total de bolas brancas existentes na caixa $C_2$ contanto com a bola branca lá posta da caixa $C_1$, isto é, $n + 1$.

Assim vem que:

$P(B|\overline{A}) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{n+1}{9} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow n + 1 = \frac{9\times 2}{3} \Leftrightarrow n + 1 = 6 \Leftrightarrow n = 5$

Logo temos que inicialmente na caixa $C_2$ existiam 5 bolas brancas e 2 bolas pretas.

2.2. A experiência repete-se várias vezes e de forma independente, logo a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial.

Número de repetições da experiência: $n = 6$

Probabilidade de sair bola branca: $p = \frac{5}{12}$
Probabilidade de sair bola preta: $q = 1 - p = \frac{7}{12}$

Usando a fórmula do modelo binomial temos:

$P$(Sair bola branca pelo menos duas vezes)$= P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) =$
$= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - {}^6C_0 \, (\frac{5}{12})^0 \, (\frac{7}{12})^6 \; - \; {}^6C_1 \, (\frac{5}{12})^1 \, (\frac{7}{12})^5 \approx 0,79$

3.

3.1. Vamos começar por determinar a massa de poluente existente ao fim de uma hora, ou seja, substituindo $t = 1$ na função $p(t)$:

$$p(1) = 120e^{-k\times 1} = 120e^{-k}$$

Duas horas após o início do processo ($t = 2$), a massa de poluente é metade da existente ao fim de uma hora, o que corresponde à equação:

$$\frac{120e^{-k}}{2} = 120e^{-k\times 2}$$

Resolvendo a equação, o valor de k é:

$\frac{120e^{-k}}{2} = 120e^{-k\times 2} \;\Leftrightarrow\; 60e^{-k} = 120e^{-2k} \;\Leftrightarrow\; \frac{60}{120}e^{-k} = e^{-2k} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2} = \frac{e^{-2k}}{e^{-k}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-k} \;\Leftrightarrow\; e^{-k} = 2^{-1} \;\Leftrightarrow\; -k = \ln 2^{-1} \;\Leftrightarrow\; -k = -\ln 2 \;\Leftrightarrow\; k = \ln 2$

3.2. Considerando $k = 0,7$ vamos calcular $p(0)$ e $p(3)$:

$$p(0) = 120e^{-0,7\times 0} = 120$$

$$p(3) = 120e^{-0,7\times 3} = 120e^{-2,1} \approx 14,69$$

Calculando a taxa média de variação da função $p$ no intervalo $[0,3]$, temos:

$$T.M.V._{[}0,3] = \frac{p(3)-p(0)}{3-0} \approx \frac{14,69-120}{3} \approx -35$$

Três horas após o início do processo, a massa de poluente decresceu, em média, 35 gramas por hora.

4.

4.1. Calculando o valor da função $f$ no ponto $x = 1$: $\quad f(1) = 2$

Calculando o valor dos limites laterais da função $f$ no ponto $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} e^{-2x+4} + \ln(x-1) = e^{-2+4} + \ln(1^+ - 1) = e^2 + \ln 0^+ = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \tfrac{2x-2}{\sin(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} 2 \times \tfrac{x-1}{\sin(x-1)} = (*_1)$$

Fazendo a mudança de variável: $y = x - 1 \quad (y \to 0^- \quad \text{quando} \quad x \to 1^-)$

$(*_1) = 2 \lim\limits_{y\to 0^-} \frac{y}{\sin y} = 2 \times \frac{1}{1} = 2 \qquad$ (Limite notável)

Como $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, então a função $f$ é contínua à esquerda no ponto 1, mas não é contínua à direita nesse ponto. Afirmação Verdadeira.

4.2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função $f$ para $x \in ]1-\pi, 1[$:

$$f'(x) = \left(\tfrac{2x-2}{\sin(x-1)}\right)' = \frac{2\sin(x-1) - \cos(x-1)(2x-2)}{\sin^2(x-1)}$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de abcissa $1 - \frac{\pi}{2}$ é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m = f'(1-\tfrac{\pi}{2}) = \frac{2\sin[(1-\frac{\pi}{2})-1] - \cos[(1-\frac{\pi}{2})-1][2(1-\frac{\pi}{2})-2]}{\sin^2[(1-\frac{\pi}{2})-1]} = \frac{2\sin(-\frac{\pi}{2}) - \cos(-\frac{\pi}{2})(-\pi)}{\sin^2(-\frac{\pi}{2})} = \frac{-2\sin(\frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{\pi}{2})(-\pi)}{\sin^2(-\frac{\pi}{2})} =$$

$$= \frac{-2\times 1 - 0}{(-1)^2} = -2$$

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função $f$ é da forma:

$$y = -2x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto $(1 - \frac{\pi}{2}, f(1 - \frac{\pi}{2}))$ (que pertence à reta) na equação da reta tangente, conseguimos determinar a constante $b$:

$$y = -2x + b \iff f(1-\tfrac{\pi}{2}) = -2(1-\tfrac{\pi}{2}) + b \iff \frac{2(1-\frac{\pi}{2})-2}{\sin[(1-\frac{\pi}{2})-1]} = -2 + \pi + b \iff$$
$$\iff \frac{-\pi}{\sin(-\frac{\pi}{2})} = -2 + \pi + b \iff \frac{-\pi}{-1} = -2 + \pi + b \iff \pi = -2 + \pi + b \iff b = 2$$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de abcissa $1 - \frac{\pi}{2}$ é:

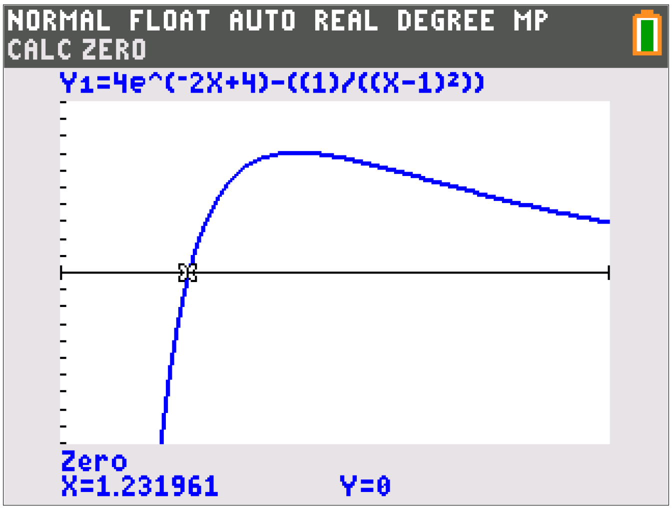
$$y = -2x + 2$$

4.3. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função $f$, para $x > 1$:

$$f'(x) = [e^{-2x+4} + \ln(x-1)]' = -2e^{-2x+4} + \frac{1}{x-1}$$

$$f''(x) = [-2e^{-2x+4} + \frac{1}{x-1}]' = 4e^{-2x+4} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora representamos o gráfico da função $f''(x)$ no intervalo pedido $]1, 2[$ e calculamos o zero de $f''(x)$ neste intervalo.




$$f''(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x \approx 1,23$$

5.

5.1. De acordo com a figura 3, a secção produzida no cilindro pelo plano de equação $x = 1$, corresponde ao retâgulo cujos lados são a altura do cilindro (igual a 3) e o diâmetro da base do cilindro (igual a 2).

$$A_{retângulo} = c \times l = 3 \times 2 = 6$$

5.2. Pela observação da figura 3, sabemos que o ponto C tem coordenadas $(1, 2, 3)$.

Com as coordenadas dos pontos C e B podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{CB}$:

$$\overrightarrow{CB} = B - C = (1, 3, 0) - (1, 2, 3) = (0, 1, -3)$$

Uma condicão cartesiana que define a reta CB é:

$$x = 1 \wedge \frac{y-3}{1} = \frac{z-0}{-3} \;\Leftrightarrow\; x = 1 \wedge y - 3 = -\frac{z}{3}$$

O ponto de intersecção da reta BC com o plano xOz tem ordenada nula, logo tem coordenadas $(1, 0, z)$.

Substituindo $y = 0$ na condição que define a reta, podemos determinar o valor da cota do ponto de interseção:

$$x = 1 \wedge y - 3 = -\frac{z}{3} \;\Leftrightarrow\; x = 1 \wedge 0 - 3 = -\frac{z}{3} \;\Leftrightarrow\; x = 1 \wedge z = 9$$

As coordenadas do ponto de interseção da reta BC com o plano xOz são $(1, 0, 9)$.

5.3. Através da condição que define a reta $r$, sabemos que o seu vetor diretor tem coordenadas $(1, 1, -1)$.

Como o plano $\alpha$ é perpendicular à reta $r$, o vetor $(1, 1, -1)$ é um vetor normal do plano $\alpha$. Assim temos que $\alpha : x + y - z + d = 0$.

Substituindo as coordenadas do ponto A (que pertence ao plano $\alpha$) na equação do plano $\alpha$, conseguimos determinar a constante $d$:

$$x + y - z + d = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 + 2 - 0 + d = 0 \;\Leftrightarrow\; d = -3$$

Logo, $\alpha : x + y - z - 3 = 0$.

Como o ponto P pertence ao plano $\alpha$, substituindo na equação do plano $\alpha$ os valores da abcissa e ordenada podemos calcular o valor da cota do ponto P:

$$x + y - z - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 + 2 - z - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 1$$

O ponto P tem coordenadas $(2, 2, 1)$.

Sabendo que $O(0, 0, 0)$ e $P(2, 2, 1)$ podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (2,2,1) - (0,0,0) = (2,2,1)$$

$$||\overrightarrow{OP}|| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

Com as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e C podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OC}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{OC} = C - O = (1,2,3) - (0,0,0) = (1,2,3)$$

$$||\overrightarrow{OC}|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$$\cos(\overrightarrow{OP}\,\hat{}\,\overrightarrow{OC}) = \frac{\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OC}}{||\overrightarrow{OP}|| \times ||\overrightarrow{OC}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OP}\,\hat{}\,\overrightarrow{OC}) = \frac{(2,2,1).(1,2,3)}{3 \times \sqrt{14}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OP}\,\hat{}\,\overrightarrow{OC}) =$$
$$= \frac{2+4+3}{3\sqrt{14}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OP}\,\hat{}\,\overrightarrow{OC}) = \frac{9}{3\sqrt{14}} \Leftrightarrow P\hat{O}C = \cos^{-1}(\frac{3}{\sqrt{14}}) \Leftrightarrow P\hat{O}C \approx 37^o$$

6. De acordo com a figura 4, a altura do triângulo [ABC] é:

$$h = \overline{CD} - \overline{BO}$$

Considerando o triângulo [ODC], vamos calcular $\overline{CO}$:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{\overline{CD}}{1} \Leftrightarrow \overline{CD} = \tan\alpha$$

Considerando o triângulo [OAA'], vamos calcular $\overline{AA'}$:

$$\sin\pi - 2\alpha = \frac{\overline{AA'}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \sin\pi - 2\alpha = \frac{\overline{AA'}}{1} \Leftrightarrow \overline{AA'} = \sin 2\alpha \Leftrightarrow \overline{AA'} = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Como $\overline{AA'} = \overline{BO}$, então $\overline{BO} = \sin 2\alpha$.

Portanto a altura do triângulo [ABC] é:

$$h = \overline{CD} - \overline{BO} = \tan\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Pela observação da figura 4, a base do triângulo [ABC] é igual a $b = \overline{AB} = \overline{OA'}$.

Considerando o triângulo [OAA'], vamos calcular $\overline{OA'}$:

$$\cos \pi - 2\alpha = \frac{\overline{OA'}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \cos \pi - 2\alpha = \frac{\overline{OA'}}{1} \Leftrightarrow \overline{OA'} = -\cos 2\alpha$$

Assim, a área do triângulo [ABC] é:

$A_{[ABC]} = \frac{b \times h}{2} = \frac{-\cos 2\alpha(\tan \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha)}{2} = \frac{-\cos 2\alpha(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 2\sin \alpha \cos \alpha)}{2} = \frac{-\cos 2\alpha \times (\frac{\sin \alpha - 2\sin \alpha \cos^2 \alpha}{\cos \alpha})}{2} =$
$= \frac{-\cos 2\alpha[\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}(1-2\cos^2 \alpha)]}{2} = \frac{-\cos 2\alpha[\tan \alpha(1-2\cos^2 \alpha)]}{2} = \frac{\cos 2\alpha[\tan \alpha(-1+2\cos^2 \alpha)]}{2} =$
$= \frac{\cos 2\alpha[\tan \alpha(-\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha)]}{2} = \frac{\cos 2\alpha[\tan \alpha(-\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)]}{2} = \frac{\cos 2\alpha[\tan \alpha(\cos 2\alpha)]}{2} = \frac{\tan \alpha \cos^2 2\alpha}{2}$