Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2016

Grupo I

1. Duas retas paralelas têm o mesmo declive, calculando o declive a reta $[AB]$ vem que:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-3}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$$

Opção(B)

2. Vamos construir uma tabela de dupla entrada:

		Dado Cúbico					
		1	2	3	4	5	6
Dado Tetraédrico	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)

Deste modo conseguimos perceber todas as hipóteses possíveis para os lançamentos das duas pessoas.

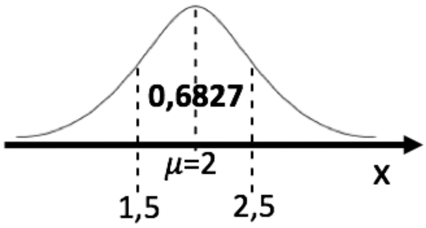
nº de casos favoráveis = nº de entradas da tabela com pelo menos um nr 4 = 9

nº de casos possíveis = nº de entradas da tabela =24

P("Pelo menos uma dessas pessoas registar o número 4")= $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

Opção(A)

3. Sabendo que $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(1,5 < X < 2,5) \approx 0,6827$, podemos traçar o gráfico da variável X que segue uma distribuição normal com $\mu = 2$ e $\sigma = 0,5$:



Logo, $P(X > 2,5) \approx 0,5 - \frac{0,6827}{2} \approx 0,16$.

Opção(D)

4. Fazendo a substituição $a = b^3$ temos:

$log_a b + log_b a = \frac{log_b b}{log_b a} + log_b b^3 = \frac{1}{log_b b^3} + 3 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$

Opção(C)

5. Fazendo a composição de f com g temos:

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

De acordo com a figura 1 podemos calculando os zeros:

$(fog)(x) = 0 \Leftrightarrow f(g(x)) = 0 \Leftrightarrow g(x) = -1 \vee g(x) = 1 \Leftrightarrow \ln x = -1 \vee \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \vee x = e \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \vee x = e$

Opção(D)

6. Dado que a função f é contínua em $\mathbb{R}$, é contínua em $x = -1$ logo vem que:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$$

Como $f(-1) = k+2$ temos:

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = k+2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -1} \frac{\sin(3x+3)}{4x+4} = k+2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sin(3x+3)}{x+1} = k+2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\times 3 \lim\limits_{x\to -1} \frac{\sin(3x+3)}{3x+3} = k+2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sin(3x+3)}{3x+3} = k+2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}\times 1 = k+2 \Leftrightarrow k = \frac{3}{4} - 2 \Leftrightarrow k = -\frac{5}{4}$ (Limite notável)

Opção(B)

7. $\text{Arg}(3+4i) > \frac{\pi}{4} \notin [0, \frac{\pi}{4}]$, por isso este número complexo não pertence à região definida pela condição.

Re$(6+2i) = 6 \notin [1,5]$, logo este número complexo também não pertence à região definida pela condição.

Re$(cis\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \notin [1,5]$, então este número complexo também não pertence à região definida pela condição.

Opção(C)

8. Vamos calcular a:

$a = \lim(a_n) = \lim(1+\frac{1}{n})^{3n} = \lim[(1+\frac{1}{n})^n]^3 = e^3$ (Limite notável)

Vamos calcular b:

$b = \lim(b_n) = \lim \ln(1-2e^{-n}) = \ln(1-2e^{-\infty}) = \ln(1-0) = \ln 1 = 0$

Opção(B)

Grupo II

1. Vamos começar por simplificar o número complexo z:

$z = \frac{2i}{1-i} + 2i^{23} = \frac{(2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} + 2i^3 = \frac{2i+2i^2}{1^2+1^2} - 2i = \frac{-2+2i}{2} - 2i = -1 + i - 2i = -1 - i$

O número complexo $z = -1 - i$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares (3º quadrante) e $|-1-i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Ou seja, $z = -1 - i = \sqrt{2}cis(\pi + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}cis(\frac{5\pi}{4})$

Logo, $\overline{z} = \sqrt{2}cis(-\frac{5\pi}{4})$

Como $w^3 = \overline{z}$, através da fórmula de Moivre:

$w = \sqrt[3]{\sqrt{2}cis(-\frac{5\pi}{4})} \Leftrightarrow w = \sqrt[3]{\sqrt{2}}cis(\frac{-\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3}),\ k \in \{0,1,2\} \Leftrightarrow w = \sqrt[6]{2}cis(\frac{-\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3})$, $k \in \{0,1,2\}$

Para $k = 0$, $w_1 = \sqrt[6]{2}cis(-\frac{5\pi}{12})$

Para $k = 1$, $w_2 = \sqrt[6]{2}cis(\frac{-\frac{5\pi}{4}+2\pi}{3}) = \sqrt[6]{2}cis(\frac{3\pi}{12}) = \sqrt[6]{2}cis(\frac{\pi}{4})$

Para $k = 2$, $w_3 = \sqrt[6]{2}cis(\frac{-\frac{5\pi}{4}+4\pi}{3}) = \sqrt[6]{2}cis(\frac{11\pi}{12})$

2.

2.1. O número de casos possíveis é igual ao o número de conjuntos diferentes de 3 bolas que podemos obter sabendo que estão n bolas no saco, ou seja, ${}^nC_3$

No saco existem n bolas sendo n um número par maior do que 3, logo existem $\frac{n}{2}$ bolas com números ímpares e $\frac{n}{2}$ bolas com números pares.

Assim o número de casos favoráveis é igual a ${}^{\frac{n}{2}}C_2 \times {}^{\frac{n}{2}}C_1 = {}^{\frac{n}{2}}C_2 \times \frac{n}{2}$.

Usando a Regra de LaPlace:

$$P(\text{Duas das 3 bolas terem número par e uma ter número ímpar}) = \frac{{}^{\frac{n}{2}}C_2 \times \frac{n}{2}}{{}^nC_3}$$

2.2. Consideremos os acontecimentos:

A: A primeira bola extraída tem número par
B: A segunda bola extraída tem número par

No contexto da situação descrita, $P(A \cap B)$ é a probabilidade de as duas bolas extraídas terem número par.

Calculando a probabilidade da primeira bola extraída ter número par, vem que:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

No caso de a extração ser feita com reposição, vamos calcular a probabilidade da segunda bola extraída ter número par sabendo que a primeira tem número par::

$$P(B|A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Logo, $a = P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

No caso de a extração ser feita sem reposição, vamos calcular a probabilidade da segunda bola extraída ter número par sabendo que a primeira tem número par:

$$P(B|A) = \frac{3}{7}$$

Logo, $b = P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$.

3.

3.1. Como o ponto F pertence ao plano OFB, substituindo na equação do plano OFB os valores da abcissa e ordenada podemos calcular o valor da cota do ponto F:

$$3x + 3y - z = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 + 3 \times 2 - z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 6$$

Logo o vértice F tem cota igual a 6.

De acordo com a figura 2, o ponto D tem coordenadas $(-2, 0, 6)$.

O vetor de coordenadas $(3, 3, -1)$ é um vetor normal do plano OFB bem como de todos os planos paralelos a este plano.

Assim, uma equação do plano paralelo ao plano OFB é da forma: $3x+3y-z+d=0$

Substituindo as coordenadas do ponto D na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$3x+3y-z+d=0 \Leftrightarrow 3\times(-2)+0-6+d=0 \Leftrightarrow d=12$$

Assim, uma equação do plano paralelo ao plano OFB que passa no ponto D é:

$$3x+3y-z+12=0$$

3.2. Pela observação da figura 2, sabemos que o ponto B tem coordenadas $(-2,2,0)$.

Com as coordenadas dos pontos B e O (origem do referencial) podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OB}$:

$$\overrightarrow{OB}=B-O=(-2,2,0)-(0,0,0)=(-2,2,0)$$

Uma condicão cartesiana que define a reta OB é:

$$\tfrac{x-0}{-2}=\tfrac{y-0}{2}\wedge z=0 \Leftrightarrow -\tfrac{x}{2}=\tfrac{y}{2}\wedge z=0$$

3.3. De acordo com a figura 2 e sabendo que o ponto P tem cota igual a 1 e pertence à aresta [BG], as suas coordenadas são $(-2,2,1)$.

Como R é o simétrico do ponto P relativamente à origem então tem coordenadas $(2,-2,-1)$.

Sabendo que $\mathrm{A}(0,2,0)$ e $\mathrm{R}(2,-2,-1)$ podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AR}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AR}=R-A=(2,-2,-1)-(0,2,0)=(2,-4,-1)$$

$$||\overrightarrow{AR}||=\sqrt{2^2+(-4)^2+(-1)^2}=\sqrt{21}$$

Com as coordenadas dos pontos A e P podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AP}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (-2,2,1) - (0,2,0) = (-2,0,1)$$

$$||\overrightarrow{AP}|| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$\cos(\overrightarrow{AR} \wedge \overrightarrow{AP}) = \frac{\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AP}}{||\overrightarrow{AR}|| \times ||\overrightarrow{AP}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AR} \wedge \overrightarrow{AP}) = \frac{(2,-4,-1).(-2,0,1)}{\sqrt{21} \times \sqrt{5}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AR} \wedge \overrightarrow{AP}) = \frac{-4+0-1}{\sqrt{21 \times 5}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AR} \wedge \overrightarrow{AP}) = -\frac{5}{\sqrt{105}} \Leftrightarrow R\hat{A}P = \cos^{-1}(-\frac{5}{\sqrt{105}}) \Leftrightarrow R\hat{A}P \approx 119^o$

4.

4.1. Calculando o valor do limite:

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(e^x + x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(e^x + x) - \ln(e^x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(\frac{e^x + x}{e^x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(\frac{e^x}{e^x} \times \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + \frac{x}{e^x}) = \ln(1 + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}) = \ln(1 + \frac{1}{+\infty}) = \ln(1) = 0$ (Limite notável)

A reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua do gráfico da função f quando $x \to +\infty$.

4.2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função f para $x \in]-\frac{3\pi}{2}, 0[$:

$$f'(x) = (\tfrac{1}{4}x^2 + \cos x)' = \tfrac{1}{2}x - \sin x$$

$$f''(x) = (\tfrac{1}{2}x - \sin x)' = \tfrac{1}{2} - \cos x$$

Os pontos de inflexão de f correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

Para $k = -1, \ x = \frac{\pi}{3} - 2\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} \notin]-\frac{3\pi}{2}, 0[\vee x = -\frac{7\pi}{6} \notin]-\frac{3\pi}{2}, 0[$

Para $k = 0, \ x = \frac{\pi}{3} \notin]-\frac{3\pi}{2}, 0[\vee x = -\frac{\pi}{3} \in]-\frac{3\pi}{2}, 0[$

Para $k=1$, $x=\frac{\pi}{3}+2\pi \vee x=-\frac{\pi}{3}+2\pi \Leftrightarrow x=\frac{7\pi}{6}\notin]-\frac{3\pi}{2},0[\vee x=\frac{5\pi}{6}\notin]-\frac{3\pi}{2},0[$

Assim, o único ponto de inflexão da função f tem abcissa igual a $-\frac{\pi}{3}$.

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		0
$f''(x)$	n.d.	+	0	-	n.d.
$f(x)$	n.d.	$\smile$	P.I.	$\frown$	n.d.

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]-\frac{\pi}{3},0[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{3}[\cup]-1,+\infty[$.

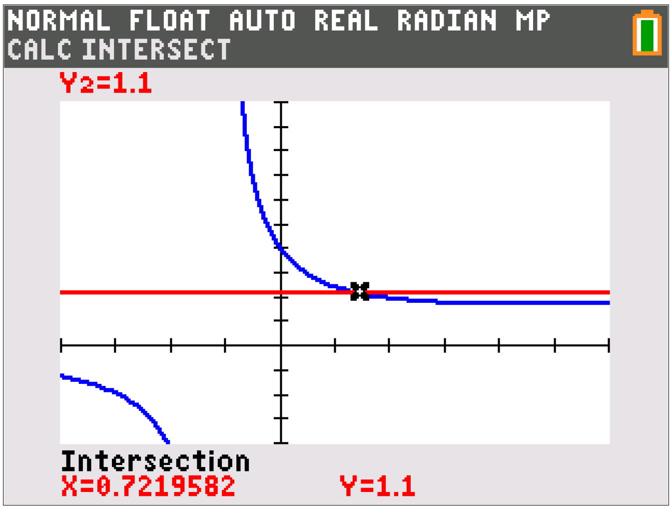
4.3. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f para $x \geq 0$:

$$f'(x)=[\ln(e^x+x)]'=\frac{e^x+1}{e^x+x}$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abssica a é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m=f'(a) \Leftrightarrow 1,1=\frac{e^a+1}{e^a+a}$$

Recorrendo à calculadora gráfica, vamos determinar a constante a (abcissa do ponto A):



Assim, temos que $a \approx 0,72$.

5.

5.1. A velocidade, em quilómetro por segundo, que a nave atinge no instante em que termina a queima do combustível é:

$$V(25) = 3\ln(\tfrac{25+300}{25+60}) \approx 4,02$$

Sabendo que a velocidade da nave se mantém constante a partir do instante em que termina a queima do combustível então a partir deste mesmo instante a nave percorre aproximadamente 4,02 km por segundo.

$$\tfrac{4,02}{200} = \tfrac{1}{x} \;\Leftrightarrow\; x = \tfrac{200}{4,02} \;\Leftrightarrow\; x \approx 50 \text{ segundos}$$

A partir do instante em que termina a queima do combustível, a nave demora aproximadamente 50 segundos a percorrer 200 quilómetros.

5.2. Resolvendo a equação:

$V(x) = 3 \Leftrightarrow 3\ln(\frac{x+300}{x+60}) = 3 \Leftrightarrow \ln(\frac{x+300}{x+60}) = 1 \Leftrightarrow \frac{x+300}{x+60} = e \Leftrightarrow x+300 = ex+60e$
$\Leftrightarrow\; ex - x = 300 - 60e \;\Leftrightarrow\; x(e-1) = 300 - 60e \;\Leftrightarrow\; x = \frac{300-60e}{e-1} \;\Leftrightarrow\; x \approx 80$

A massa da carga transportada deverá ser aproximadamente de 80 milhares de toneladas.

6. Considerando que $g(0) \times g(k) < 0$ então temos que:

$g(0) < 0 \wedge g(k) > 0 \;\vee\; g(0) > 0 \wedge g(k) < 0 \;\Leftrightarrow\; \ln k < 0 \wedge \ln 2k > 0 \;\vee$ $\ln k > 0 \wedge \ln 2k < 0 \;\Leftrightarrow\; k < 1 \wedge 2k > 1 \;\vee\; k > 1 \wedge 2k < 1 \;\Leftrightarrow\; k < 1 \wedge k > \frac{1}{2} \;\vee$ $k > 1 \wedge k < \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; k \in \,]\frac{1}{2}, 1[\;\vee\; k \in \{\} \;\Leftrightarrow\; k \in]\frac{1}{2}, 1[$