Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2015

Grupo I

1. Vamos começar por calcular $P(A)$:

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \;\Leftrightarrow\; 0,7 = P(A) + 0,4 - 0,2 \;\Leftrightarrow\; P(A) = 0,5$

   Usando a fórmula da probabilidade condicionada, vem que:

   $$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$$

   Opção(D)

2. Considerando que os rapazes (R) ficam juntos, temos 7 maneiras diferentes de os colocar:

   $$\begin{array}{ccccccccc}
   \underline{R} & \underline{R} & \underline{R} & _ & _ & _ & _ & _ & _ \\
   _ & \underline{R} & \underline{R} & \underline{R} & _ & _ & _ & _ & _ \\
   _ & _ & \underline{R} & \underline{R} & \underline{R} & _ & _ & _ & _ \\
   _ & _ & _ & \underline{R} & \underline{R} & \underline{R} & _ & _ & _ \\
   _ & _ & _ & _ & \underline{R} & \underline{R} & \underline{R} & _ & _ \\
   _ & _ & _ & _ & _ & \underline{R} & \underline{R} & \underline{R} & _ \\
   _ & _ & _ & _ & _ & _ & \underline{R} & \underline{R} & \underline{R}
   \end{array}$$

   O número de maneiras diferentes que temos de dispor os rapazes juntos tendo em conta que podem permutar entre si é igual a $7 \times 3!$.

   As restantes 6 posições são ocupadas pelas 6 raparigas o que faz $6!$ hipóteses.

   Logo, o número de maneiras o podem fazer, de modo que os rapazes fiquem juntos é:

   $$7 \times 3! \times 6! = 7! \times 3! = 30240$$

   Opção(B)

3. Substituindo as coordenadas do ponto P na expressão algébrica da função f conseguimos determinar a constante a:

$$f(x) = e^{a\ln x} \;\Leftrightarrow\; 8 = e^{a\ln 2} \;\Leftrightarrow\; 8 = e^{\ln 2^a} \;\Leftrightarrow\; 8 = 2^a \;\Leftrightarrow\; a = 3$$

Opção(C)

4. De acordo com a figura 1, sabemos que o único ponto de inflexão da função f é em $x = 0$ e que a função f tem concavidade voltada para baixo no intervalo $]-\infty, 0[$ e tem concavidade voltada para cima no intervalo $]0, +\infty[$.

Opção(C)

5. Calculando o valor do limite, vem que:

$$\lim_{x\to 2} \tfrac{f(x)-f(2)}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2} \tfrac{1}{x}.\tfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \tfrac{1}{2}\lim_{x\to 2} \tfrac{1}{x}\tfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \tfrac{1}{2}f'(2) = \tfrac{1}{2}\times 6 = \tfrac{6}{2} = 3$$

Opção(A)

6. De acordo com a figura 2, o centro do quadrado coincide com a origem e cada lado do quadrado é paralelo a um eixo. Os vértices do quadrado estão sobre as bissetrizes dos quadrantes por isso vamos considerar:

$$z_1 = a + bi \qquad z_2 = -a + bi \qquad z_3 = -a - bi \qquad z_4 = a - bi$$

$|z_3 - z_1| = |z_4 - z_2| \;\Leftrightarrow\; |-a-bi-(a+bi)| = |a-bi-(-a+bi)| \;\Leftrightarrow\; |-a-bi-a-bi| =$
$= |a - bi + a - bi| \;\Leftrightarrow\; |-2a - 2bi| = |2a - 2bi|$ Afirmação verdadeira

$z_1 + z_4 = 2Re(z_1) \;\Leftrightarrow\; a + bi + a - bi = 2(a) \Leftrightarrow 2a = 2a$ Afirmação verdadeira

$\frac{z_4}{i} = z_1 \;\Leftrightarrow\; a - bi = i\times(a+bi) \;\Leftrightarrow\; a - bi = ai - b$ Afirmação falsa

$-\overline{z_1} = z_2 \;\Leftrightarrow\; -(a - bi) = -a + bi \Leftrightarrow -a + bi = -a + bi$ Afirmação verdadeira

Opção(C)

7. Cada lado de um hexágono regular de perímetro 12 é igual a $\frac{12}{nr\ de\ lados} = \frac{12}{6} = 2$.

   Logo temos que $||\overrightarrow{BA}|| = ||\overrightarrow{BC}|| = 2$.

   Podemos decompor um hexágono regular em seis triângulos equiláteros, sendo que o valor do ângulo interno de um hexágono regular é igual ao dobro da amplitude de um triângulo equilátero, logo temos que:

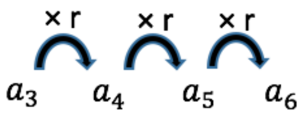
$$A\hat{B}C = 2 \times 60 = 120^o$$

   Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

   $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = cos(\overrightarrow{BA}\,\hat{}\,\overrightarrow{BC}) \times ||\overrightarrow{BA}|| \times ||\overrightarrow{BC}|| = \cos(120) \times 2 \times 2 = -\frac{1}{2} \times 4 = -2$

   Opção(B)

8. Sabemos que a_n é uma progressão geométrica.



   Logo temos que:

$$a_6 = a_3 \times r^3 \;\Leftrightarrow\; 2 = \frac{1}{4} \times r^3 \;\Leftrightarrow\; r = \sqrt[3]{8} \;\Leftrightarrow\; r = 2$$

   Conhecendo a razão da progressão geométrica conseguimos determinar o vigésimo termo da sucessão:

$$a_{20} = a_6 \times r^{14} \;\Leftrightarrow\; a_{20} = 2 \times 2^{14} \;\Leftrightarrow\; a_{20} = 2^{15} \;\Leftrightarrow\; a_{20} = 32768$$

   Opção(C)

Grupo II

1. Sabemos que o ângulo entre duas raízes de índice n consecutivas é igual a $\frac{2\pi}{n}$. Como z_1 e z_2 são vértices consecutivos do polígono regular, basta determinarmos o ângulo entre eles para calcularmos o número de lados n do polígono.

   Vamos começar por simplificar e escrever na forma trigonométrica os números complexos z_1 e z_2.

   O número complexo $1+i$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares (1º quadrante) e $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

   Logo, $z_1 = (1+i)^6 = (\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4}))^6 = (\sqrt{2})^6 cis(\frac{6\pi}{4}) = 8cis(\frac{3\pi}{2})$

   O número complexo $8i$ pertence ao semieixo imaginário positivo ($\text{Arg}(8i) = \frac{\pi}{2}$) e $|w| = 8$. Ou seja, $8i = 8cis(\frac{\pi}{2})$.

   $z_2 = \frac{8i}{cis(-\frac{6\pi}{5})} = \frac{8cis(\frac{\pi}{2})}{cis(-\frac{6\pi}{5})} = \frac{8}{1}cis(\frac{\pi}{2} + \frac{6\pi}{5}) = 8cis(\frac{17\pi}{10})$

   O ângulo entre z_1 e z_2 é igual a $\text{Arg}(z_2) - \text{Arg}(z_1)$:

   $$\frac{17\pi}{10} - \frac{3\pi}{2} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{10} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow n = 10$$

2.

   2.1. O vetor $(2,-1,1)$ é um vetor normal do plano β.

   Como a reta OP é perpendicular ao plano β então o vetor $\overrightarrow{OP}$ e o vetor normal do plano $(2,-1,1)$ são colineares:

   $$\overrightarrow{OP} = k(2,-1,1), \quad k \in \mathbb{R}$$

   Com as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e P podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$:

   $$\overrightarrow{OP} = P - O = (-2,1,3a) - (0,0,0) = (-2,1,3a)$$

Logo temos que:

$\overrightarrow{OP} = k(2,-1,1) \Leftrightarrow (-2,1,3a) = k(2,-1,1) \Leftrightarrow -2 = 2k \;\wedge\; 1 = -k \;\wedge$
$\wedge\; 3a = k \;\Leftrightarrow\; k = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$

2.2. O ponto B pertence ao eixo Ox logo tem ordenada e cota nula.

Como o ponto B pertence ao plano β, substituindo na equação do plano β os valores da ordenada e cota podemos calcular o valor da abcissa do ponto B:

$$2x - y + z - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x - 0 + 0 - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2$$

Logo o ponto B tem coordenadas $(2,0,0)$.

O ponto C é simétrico do ponto B relativamente ao plano yOz, ou seja, as coordenadas do ponto C são $(-2,0,0)$.

Com as coordenadas dos pontos A e B podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,0,0) - (1,2,3) = (1,-2,-3)$$

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

Sabendo que $A(1,2,3)$ e $C(-2,0,0)$, podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-2,0,0) - (1,2,3) = (-3,-2,-3)$$

$$||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$\cos(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}}{||\overrightarrow{AB}||\times||\overrightarrow{AC}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}) = \frac{(1,-2,-3).(-3,-2,-3)}{\sqrt{14}\times\sqrt{22}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}) =$
$= \frac{-3+4+9}{\sqrt{14\times(22)}} \;\Leftrightarrow\; \cos(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}) = \frac{10}{\sqrt{308}} \;\Leftrightarrow\; B\hat{A}C = \cos^{-1}(\frac{10}{\sqrt{308}}) \;\Leftrightarrow\; B\hat{A}C \approx 55^o$

2.3. Seja T o ponto de tangência do plano β com a superfície esférica.

Sabendo as coordenadas do ponto O e um vetor diretor da reta OT (vetor normal ao plano β), uma equação vetorial da reta OT é:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(2, -1, 1), \qquad k \in \mathbb{R}$$

As coordenadas genéricas do ponto P pertencente à reta OT são $(2k, -k, k)$.

Como o ponto T pertence ao plano β (ponto de interseção do plano β com a reta OT), substituindo as coordenadas do ponto P na equação do plano conseguimos calcular a constante k:

$2x - y + z - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2(2k) - (-k) + k - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; 4k + k + k = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; 6k = 4 \;\Leftrightarrow\; k = \frac{2}{3}$

Substituindo $k = \frac{2}{3}$ nas coordenadas genéricas do ponto P conseguimos saber as coordenadas do ponto de interseção do plano β com a reta OT:

$$\text{T}\ \left(\tfrac{4}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right).$$

Fazendo a distância entre o ponto O e o ponto T, conseguimos calcular o raio da superfície esférica:

$$d(OT) = \sqrt{\left(0 - \tfrac{4}{3}\right)^2 + \left[0 - \left(-\tfrac{2}{3}\right)\right]^2 + \left(0 - \tfrac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{24}}{3}$$

Uma equação cartesiana que define a superfície esférica de centro na origem do referencial e que é tangente ao plano β é:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = \left(\tfrac{\sqrt{24}}{3}\right)^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 + z^2 = \frac{24}{9}$$

3.

3.1. O número de casos possíveis é igual ao número de arranjos completos da extração de 3 das 9 bolas do saco visto que as bolas são retiradas uma a uma e com reposição, ou seja, ${}^{9}A_3' = 729$.

Para que produto dos números das três bolas retiradas ser igual a 2 tem de ser extraída 1 única bola com o número 2 e as restantes duas extrações da bola com o número 1. Como a ordem interessa temos de ver quantas hipóteses temos na extração destas 3 bolas:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}$$

Portanto temos 3 casos favoráveis.

Usando a regra de Laplace:

P(Produto dos números das três bolas retiradas ser igual a 2)$= \frac{3}{729} = \frac{1}{243}$

3.2. A variável X segue distribuição binomial na repetição independente de 10 provas da mesma experiência. Portanto a probabilidade de sucesso é a probabilidade da soma das duas bolas retiradas ser 7 em cada uma das repetições da experiência.

No saco existem 9 bolas, o número de casos possíveis em cada repetição da experiência é ${}^9C_2$. De modo que a soma das duas bolas retiradas ser igual a 7 temos de ter os pares: (1,6); (2,5) e (3,4) sendo que não interessa a ordem. Portanto o número de casos favoráreis à probabilidade de sucesso é 3.

Calculando a probabilidade de sucesso através da regra de Laplace:

$$p = \frac{3}{{}^9C_2} = \frac{1}{12}$$

Sabendo p conseguimos calcular a probabilidade de insucesso, ou seja, a probabilidade da soma das duas bolas retiradas ser diferente de 7 em cada uma das repetições da experiência:

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

A expressão ${}^{10}C_n$ considera as ordenações possíveis dos n sucessos que podem ocorrer nas 10 repetições.

4.

4.1. Vamos calcular $N(10)$ e $N(20)$:

$$N(10) = \frac{200}{1+50e^{-0,25\times 10}} \approx 39,18$$

$$N(20) = \frac{200}{1+50e^{-0,25\times 200}} \approx 149,60$$

Calculando a taxa média de variação da função N no intervalo $[10,20]$, temos:

$$T.M.V._{[10,20]} = \frac{N(20)-N(10)}{20-10} \approx \frac{149,60-39,18}{10} \approx 11$$

Entre o ano de 1900 e o ano 2000 o número de habitantes desta região do globo, cresceu em média, 11 milhões em cada década.

$N = \frac{200}{1+50e^{-0,25t}} \Leftrightarrow 1 + 50e^{-0,25t} = \frac{200}{N} \Leftrightarrow 50e^{-0,25t} = \frac{200}{N} - 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 50e^{-0,25t} = \frac{200-N}{N} \Leftrightarrow e^{-0,25t} = \frac{200-N}{50N} \Leftrightarrow -0,25t = \ln(\frac{200-N}{50N}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}t = \ln(\frac{200-N}{50N}) \Leftrightarrow t = -4\ln(\frac{200-N}{50N}) \Leftrightarrow t = \ln(\frac{200-N}{50N})^{-4} \Leftrightarrow t = \ln(\frac{50N}{200-N})^4$

5.

5.1. $D_f = \mathbb{R}_0^+$, logo vamos verificar se existe assíntota horizontal quando $x \to +\infty$:

► $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \times e^1 \times e^{-x} = e \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = e \times \frac{1}{+\infty} = 0$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, então a reta $y = 0$ é assíntota horizontal da função f quando $x \to +\infty$.

5.2. Vamos determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f:

$$f'(x) = (x^2e^{1-x})' = 2xe^{1-x} - e^{1-x}x^2 = e^{1-x}(2x - x^2)$$

Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(2x - x^2) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x} = 0_{\,(Eq.imp.)} \lor 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x(2 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = 2$

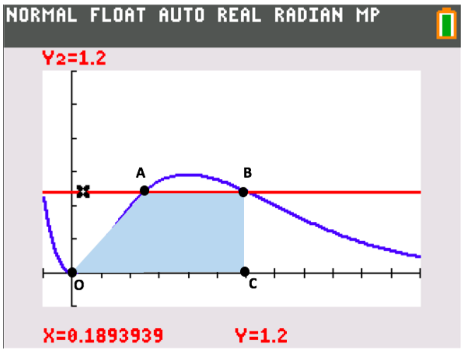
De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0	-
$f(x)$	Mínimo	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$

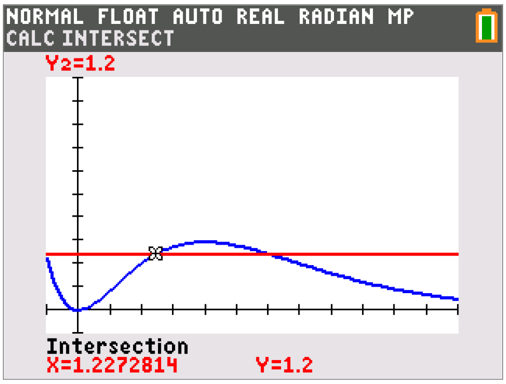
O gráfico de f é decrescente no intervalo $[2, +\infty[$, é crescente no intervalo $[0, 2]$, tem um máximo para $x = 2$ e um mínimo para $x = 0$.

5.3.

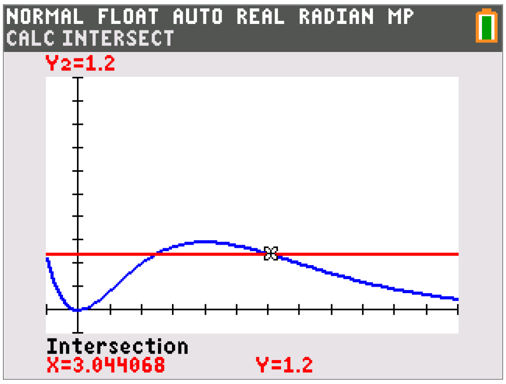
Representando o desenho do quadrilátero [OABC]:



Recorrendo à calculadora gráfica vamos determinar as coordenadas dos pontos A e B que pertencem ao gráfico da função f:



A tem coordenadas $(1,227;1,2)$



B tem coordenadas $(3,044;1,2)$

Como o ponto C pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual à do ponto B, então as suas coordenadas são $(3,044;0)$.

O quadrilátero [OABC] é um trapézio, a sua área é:

$$A_{[OABC]} = \frac{B+b}{2} \times h \approx \frac{3{,}044+(3{,}044-1{,}227)}{2} \times 1,2 \approx 2,92$$

6. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f:

$$f'(x) = [a \sin x]' = a \cos x$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abssica $\frac{2\pi}{3}$ é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m_r = f'(\tfrac{2\pi}{3}) = a\cos\tfrac{2\pi}{3} = a\cos(\pi - \tfrac{\pi}{3}) = -a\cos\tfrac{\pi}{3} = -\tfrac{a}{2}$$

Sabendo que a inclinação da reta r é igual a $\frac{\pi}{6}$ vem que:

$$\tan\tfrac{\pi}{6} = -\tfrac{a}{2} \;\Leftrightarrow\; \tfrac{\sqrt{3}}{3} = -\tfrac{a}{2} \;\Leftrightarrow\; -a = \tfrac{2\sqrt{3}}{3} \;\Leftrightarrow\; a = -\tfrac{2\sqrt{3}}{3}$$