Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2ª Fase | Versão 1 | Ensino Secundário | 2017

Grupo I

1. Considerando que os algarismos pares de 1 a 5, ou seja, os algarismos 2 e 4 ficam juntos, temos 4 maneiras diferentes de os colocar:

$$\begin{array}{ccccc} \underline{2} & \underline{4} & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \underline{2} & \underline{4} & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \underline{2} & \underline{4} & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \underline{2} & \underline{4} \end{array}$$

O número de maneiras diferentes que podemos dispor os números 2 e 4 juntos tendo em conta que podem permutar entre si é igual a $4 \times 2!$.

As restantes 3 posições podem ser ocupadas pelos algarismos 1, 3 e 5 o que faz 3! hipóteses.

Logo, o número de números naturais de cinco algarismos diferentes de 1 a 5 que têm os algarismos pares um a seguir ao outro é:

$$2! \times 4 \times 3! = 48$$

Opção(B)

2. Usando a fórmula da probabilidde condicionada temos:

$$P(x > 1|x \leq 3) = \frac{P(x>1 \ \cap \ x\leq 3)}{P(x\leq 3)} = \frac{P(x=2)+P(x=3)}{1-P(x=4)} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{10}{24}}{\frac{3}{4}} = \frac{40}{72} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

Opção(D)

3. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{f(x)-f(2)} = 4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} x \times \frac{x-2}{f(x)-f(2)} = 4 \Leftrightarrow 2\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{f(x)-f(2)} = 4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{f(x)-f(2)} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{f(x)-f(2)} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{f'(2)} = 2 \Leftrightarrow f'(2) = \frac{1}{2}$

   Opção(C)

4. Fazendo a composição da função g com a função vem que:

$$gof(x) = g(f(x))$$

   Pela observaçao das figuras 1 e 2, conseguimos calcular os zeros de $gof(x)$:

   $g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$

   Opção(B)

5. O gráfico da função g é simétrico relativamente ao eixo das abcissas do gráfico da função $f(x-5)$, que por sua vez é uma translação horizontal do gráfico de f associada ao vetor de coordenadas $(5,0)$.

   Através da tabela de variação de sinal da função $f''(x)$ podemos construir uma tabela de variação de sinal da função $-f''(x-5)$:

x	$-\infty$	-5		5		15	$+\infty$
$f''(x-5)$	-	0	$+$	0	-	0	$+$
$-f''(x-5)$	$+$	0	-	0	$+$	0	-
$g(x)$	$\smile$	P.I.	$\frown$	P.I.	$\smile$	P.I.	$\frown$

   O gráfico de g tem concavidade voltada para baixo no intervalo $]-5,5[\cup]15,+\infty[$.

   Opção(C)

6. z é um número complexo da forma: $z = \rho cis(\frac{\pi}{5})$.

   - $iz = 1cis(\frac{\pi}{2}) \times \rho cis(\frac{\pi}{5}) = \rho cis(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}) = \rho cis(\frac{7\pi}{10})$
   - $-5iz = 5cis(\pi) \times \rho cis(\frac{7\pi}{10}) = 5\rho cis(\pi + \frac{7\pi}{10}) = 5\rho cis(\frac{17\pi}{10})$

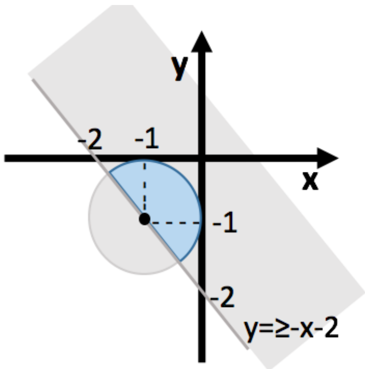
$\frac{17\pi}{10} - 2\pi = -\frac{3\pi}{10}$

Opção(A)

7. A condição $(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 1$ representa um círculo de centro de coordenadas $(-1,-1)$ e raio igual a 1.

   Como $x+y+2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -x-2$, a condição $x+y+2 \geq 0$ representa o semiplano à direita da reta $y=-x-2$

   Vamos representar, num referencial xOy, a condição $(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 1 \ \wedge$
   $\wedge \ x+y+2 \geq 0$:



   O perímetro da região definida pela condição é igual:

$$P_{Região} = P_{Semi-círculo} + Diâmetro_{círculo} = \frac{2\pi r}{2} + D = \pi \times 1 + 2 = \pi + 2$$

Opção(C)

8. Para $n=1$, $u_1 = (\frac{1}{2})^0 = 1$

   Para $n=2$, $u_2 = (\frac{1}{2})^{-1} = 2$ $(u_2 = u_1 \times 2)$

   Para $n=3$, $u_3 = (\frac{1}{2})^{-2} = 4$ $(u_3 = u_2 \times 2)$
   ...

   A sucessão u_n é uma progressão geométrica de razão igual a 2.

Opção(B)

Grupo II

1. Vamos começar por determinar a forma algébrica do número complexo z_2.

   $z_1 \times \overline{z_2} = 4 - 3i \Leftrightarrow (2+i) \times \overline{z_2} = 4 - 3i \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{4-3i}{2+i} \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{(4-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$
   $\Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{8-4i-6i+3i^2}{2^2+1^2} \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{5-10i}{5} \Leftrightarrow \overline{z_2} = 1 - 2i$

   Logo, $z_2 = 1 + 2i$

   Agora vamos escrever $\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4})$ na forma algébrica:

   $\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}[\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})] = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}i = 1 + i$

   Vamos mostrar que o número complexo $\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4})$ verifica a condição $|z - z_1| = |z - z_2|$:

   $|z - z_1| = |z - z_2| \Leftrightarrow |1+i-(2+i)| = |1+i-(1+2i)| \Leftrightarrow |1+i-2-i| = |1+i-1-2i|$
   $\Leftrightarrow |-1| = |-i| \Leftrightarrow 1 = 1$

   Como $|z - z_1| = |z - z_2|$ então o número complexo $\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4})$ está a igual distância dos números complexos z_1 e z_2, ou seja, $\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4})$ pertence à mediatriz do segmento de reta z_1z_2.

2.

   2.1. De acordo com a figura 3 o ponto A pertence ao plano xOy, por isso tem cota nula e a sua ordenada é igual à ordenada do ponto D, ou seja, é igual 4.

   Como o ponto A pertence ao plano ACG, substituindo na equação do plano ACG os valores da ordenada e cota podemos calcular o valor da abcissa do ponto A:

   $$x + y - z - 6 = 0 \Leftrightarrow x + 4 - 0 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

   Logo o vértice A tem abcissa igual a 2.

   2.2. Vamos escrever a equação do plano ACG em ordem a z:

   $$x + y - z - 6 = 0 \Leftrightarrow z = x + y - 6$$

Susbstituindo a variável z no sistema de equações que define a reta r vem que:

$$\begin{cases} x-1=z \\ 1-y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=x+y-6 \\ 1-y=x+y-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-x-y=-6+1 \\ ---------- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y=-5 \\ ---- \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ 1-5=x+5-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ 1-5-5+6=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ x=-3 \end{cases}$$

Como o ponto de interseção da reta r com o plano ACG pertence ao plano ACG, substituindo na equação do plano ACG os valores da abcissa e ordenada podemos calcular o valor da cota do ponto:

$$x+y-z-6=0 \Leftrightarrow -3+5-z-6=0 \Leftrightarrow z=-4$$

As coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ACG são $(-3,5,-4)$.

2.3. De acordo com a figura 3, a base [EFGH] tem aresta igual a 2 e sabendo as coordenadas dos pontos A e D conseguimos perceber que o ponto P tem coordenadas (1,5,z), sendo que z é igual ao valor da altura da pirâmide regular de base [EFGH].

Através da fórmula do volume da pirâmide vamos determinar a cota do ponto P:

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3}A_{base} \times altura \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{3} \times 2^2 \times z \Leftrightarrow 4 = \frac{4}{3} \times z \Leftrightarrow z = \frac{4}{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z = 3$

Assim, P tem coordenadas (1,5,5).

Sabendo que G(2,6,2) e P(1,5,5) podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GP}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{GP} = P - G = (1,5,5) - (2,6,2) = (-1,-1,3)$$

$$||\overrightarrow{GP}|| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

Com as coordenadas dos pontos G e O (O é a origem do referencial) podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GO}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{GO} = O - G = (0,0,0) - (2,6,2) = (-2,-6,-2)$$

$$||\overrightarrow{GO}|| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{44}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$\cos(\overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{GP}) = \frac{\overrightarrow{GO}.\overrightarrow{GP}}{||\overrightarrow{GO}|| \times ||\overrightarrow{GP}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{GP}) = \frac{(-2,-6,-2).(-1,-1,3)}{\sqrt{44} \times \sqrt{11}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{GP}) = \frac{2+6-6}{\sqrt{44 \times 11}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{GP}) = \frac{2}{\sqrt{484}} \Leftrightarrow O\hat{G}P = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{484}}\right) \Leftrightarrow O\hat{G}P \approx 85^o$

3.

3.1. Consideremos os acontecimentos:

A: O aluno escolhido é rapariga
B: O aluno escolhido frequenta o 10º ano

$P(\overline{A} \cup \overline{B})$ é a probabilidade de o aluno escolhido ser rapaz ou não frequentar o 10º ano que é igual a 0,82.

$P(B|A)$ é a probabilidade de o aluno escolhido frequentar o 10º ano, sabendo que é rapariga que é igual a $\frac{1}{3}$.

Usando as Leis de Morgan temos que:

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$.

Assim vem que:

$1 - P(A \cap B) = 0,82 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,18$

Recorrendo à definição de probabilidade condicionada:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{0,18}{P(A)} \Leftrightarrow P(A) = 0,18 \times 3 \Leftrightarrow P(A) = 0,54$$

3.2. O número de casos possíveis é igual ao número de escolhas diferentes que podem ser feitas de quatro dos trinta cartões existentes no saco, ou seja, ${}^{30}C_4$.

Considerando que os cartões com os dois menores números saídos, 7 e 22 já estão escolhidos, os restantes dois números devem ser escolhidos dos $30-22=8$ cartões com números superiores a 22. Portanto o número de casos favoráveis é igual a ${}^1C_1 \times {}^1C_1 \times {}^8C_2$.

Usando a Regra de LaPlace vem que:

$P(\text{"Os dois menores números saídos serem o 7 e o 22"}) = \frac{n^o\ de\ casos\ favoráveis}{n^o\ de\ casos\ \ possíveis} =$
$= \frac{{}^1C_1 \times {}^1C_1 \times {}^8C_2}{{}^{30}C_4} \approx 0,001$

4.

4.1. As assíntotas paralelas aos eixos coordenados, se existirem, são assíntotas verticais ou horizontais.

Vamos verificar se existem assíntotas verticais:

$D_f = \mathbb{R}^+$, por isso a única possível assíntota vertical da função f é a reta de equação $x = 0$. A função f é contínua no seu domínio pois resulta de operações entre funções contínuas neste domínio.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 0^+}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ concluímos que $x = 0$ é assíntota vertical da função f.

Vamos verificar se existem assíntotas horizontais:

A função f só está definida em $\mathbb{R}^+$, logo só temos de averiguar a existência de uma única assíntota horizontal quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{(Limite notável)}$$

Como $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ concluímos que $y = 0$ é assíntota horizontal da função f.

4.2. Vamos resolver a inequação $f(x) > 2\ln x$:

$f(x) > 2\ln x \;\Leftrightarrow\; \frac{\ln x}{x} > 2\ln x \;\Leftrightarrow\; \ln x > 2x\ln x \wedge x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \ln x - 2x\ln x > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; (\ln x)(1-2x) > 0$

Construindo um quadro de sinal, temos:

x	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$\ln x$	-	-	-	-	0	$+$
$1-2x$	$+$	$+$	0	-	-	-
$(\ln x)(1-2x)$	-	-	0	$+$	0	-

Logo, C.S $=]\frac{1}{2}, 1[$

4.3. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g:

$g'(x) = [\frac{k}{x} + f(x)]' = (\frac{k}{x} + \frac{\ln x}{x})' = -\frac{k}{x^2} + \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x}{x^2} = -\frac{k}{x^2} + \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{-k+1-\ln x}{x^2}$

Os extremos relativos da função g correspondem aos zeros da primeira derivada, logo para $x = 1$ temos que:

$g'(1) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-k+1-\ln 1}{1^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-k+1-0}{1} = 0 \;\Leftrightarrow\; -k+1 = 0 \;\Leftrightarrow\; k = 1$

5. Usando o caso notável:

$(2x\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{x})^2 = 4x^2\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{x^2}$

Igualando o termo independente de x a 1, vem que:

$4\sin\alpha\cos\alpha = 1 \;\Leftrightarrow\; 2\sin 2\alpha = 1 \;\Leftrightarrow\; \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$
$\Leftrightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee \alpha = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Para $k = -1,\; \alpha = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12} \quad \notin]\pi, 2\pi[\vee \alpha = \frac{5\pi}{12} - \pi = -\frac{7\pi}{12} \quad \notin]\pi, 2\pi[$

Para $k = 0,\; \alpha = \frac{\pi}{12} \quad \notin]\pi, 2\pi[\vee \alpha = \frac{5\pi}{12} \quad \notin]\pi, 2\pi[$

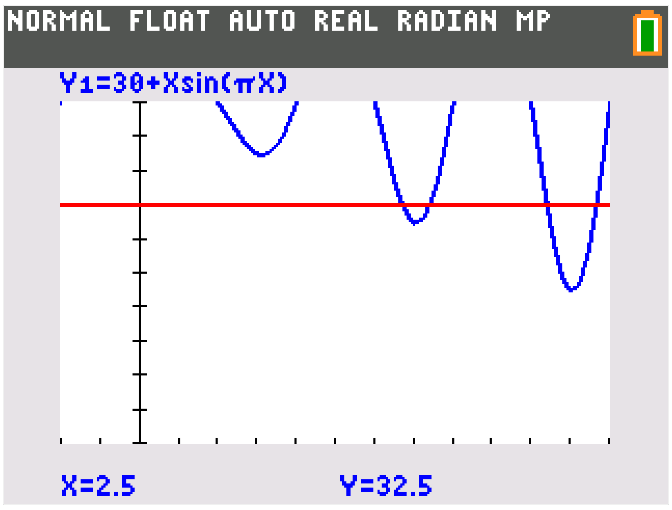
Para $k = 1,\; \alpha = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12} \quad \in]\pi, 2\pi[\vee \alpha = \frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12} \quad \in]\pi, 2\pi[$

Para $k = 2,\; \alpha = \frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{25\pi}{12} \quad \notin]\pi, 2\pi[\vee \alpha = \frac{5\pi}{12} + 2\pi = \frac{29\pi}{12} \quad \notin]\pi, 2\pi[$

Logo, $\alpha = \{\frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\}$.

6.

6.1. Recorrendo à calculadora gráfica, vamos inserir a função $y_1 = 30 + x\sin(\pi x)$ e a reta de equação $y_2 = 27$ utilizando a janela de visualização $x \in [-1, 7]$ e $y \in [20, 30]$.



De acordo com o gráfico da função, quando $x \in [0, 6]$ a reta $y_2 = 27$ interseta a função y_1 em 4 pontos, logo o número de soluções da equação $d(t) = 27$ é 4.

6.2. Tendo em conta que no instante em que é iniciada a contagem do tempo, as hastes do baloiço estão na vertical e que a distância do ponto P ao chão, nesse instante, é 4 dm, temos que a distância do ponto P ao muro no instante inicial, é igual a:

$$d(0) = 30 + 0 = 30 \text{ dm}$$

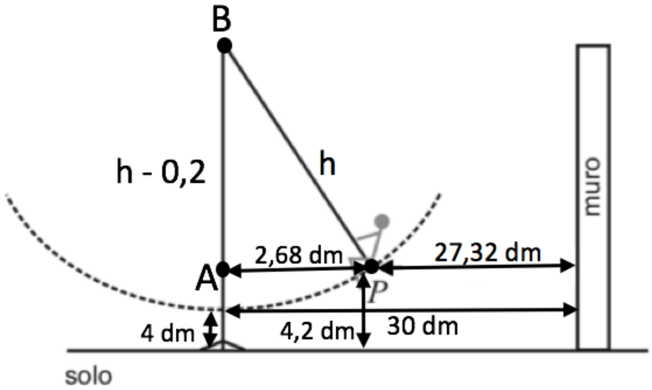
Sabendo que treze segundos e meio após o instante inicial, a distância do ponto P ao chão é 4,2 dm, temos que a distância do ponto P ao muro nesse instante, é igual a:

$$d(13,5) = 30 + 12e^{12-13,5}\sin^{(}\pi \times 13,5) \approx 27,32 \text{ dm}$$

Tendo em conta o nosso esquema, vem que:

$$\overline{AB} = h - 2, \qquad \overline{BP} = h \quad \text{e} \quad \overline{PA} = 30 - 27,32 = 2,68$$

Vamos considerar o triângulo retângulo $[APB]$ da figura abaixo:



Usando o Teorema de Pitágora podemos calcular o comprimento da haste (h):

$h^2 = (h - 0,2)^2 + 2,68^2 \Leftrightarrow h^2 = h^2 - 2 \times 0,2h + 0,2^2 + 2,68^2 \Leftrightarrow 0,4h = 0,04 + 7,1824 \Leftrightarrow h = \frac{7,2224}{0,4} \Leftrightarrow h \approx 18$ dm

Assim temos que o valor do comprimento da haste é, aproximadamente, 18 dm.