Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2ª Fase | Versão 1 | Ensino Secundário | 2016

Grupo I

1. Sabendo que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,6$ conseguimos calcular $P(A \cup B)$:

   $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,6 \;\Leftrightarrow\; P(\overline{A \cup B}) = 0,6 \;\Leftrightarrow\; 1 - P(A \cup B) = 0,6 \;\Leftrightarrow\; P(A \cup B) = 0,4$

   Calculando $P(A \cap B)$:

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \;\Leftrightarrow\; P(A \cap B) = 0,2 + 0,3 - 0,4 \;\Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow\; P(A \cap B) = 0,1$

   Usando a fórmula da probabilidade condicionada:

   $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$$

   Opção(A)

2. A experiência repete-se várias vezes e de forma independente, logo a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial.

   Número de repetições da experiência: $n = 5$
   Probabilidade de o Carlos encestar: $p = 0,4$
   Probabilidade de o Carlos não encestar: $q = 1 - p = 1 - 0,4 = 0,6$

   Usando a fórmula do modelo binomial temos:

   P(O Carlos encestar exatamente 4 vezes)$= P(X = 4) = {}^{6}C_4 \; 0,4^4 \; 0,6^1 = 0,0768$

   Opção(C)

3. Usando as propriedades dos logaritmos temos:

   $log_a(ab^3) = 5 \Leftrightarrow log_a a + log_a b^3 = 5 \Leftrightarrow 1 + 3log_a b = 5 \Leftrightarrow 3log_a b = 4 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow log_a b = \frac{4}{3}$

   Assim temos que:

   $$log_b a = \frac{log_a a}{log_a b} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

   Opção(B)

4. $\lim u_n = \lim \frac{n}{e^n} = \lim \frac{1}{\frac{e^n}{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$ (Limite notável)

   Logo, $\lim f(u_n) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} lnx = ln0^+ = -\infty$

   Opção(A)

5. Como os lados $[AC]$ e $[QR]$ são pralelos temos que:

   $$A\hat{O}P = P\hat{Q}R$$

   Consideremos o triângulo retângulo $[OQR]$, pela definição de cosseno vem que:

   $$\cos\alpha = \frac{\overline{QR}}{\overline{QO}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{QR}}{1} \Leftrightarrow \overline{QR} = \cos\alpha$$

   Pela definição de seno vem que:

   $$\sin\alpha = \frac{\overline{OR}}{\overline{QO}} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\overline{OR}}{1} \Leftrightarrow \overline{OR} = \sin\alpha$$

   De acordo com a figura 1, a altura do triângulo $[PQR]$ é igual a $2 \times \overline{OR}$.

   Assim a área do triângulo $[PQR]$ é igual a:

   $$A_{[PQR]} = \frac{b \times h}{2} = \frac{\overline{QR} \times 2\overline{OR}}{2} = \frac{cos\alpha \times 2\sin\alpha}{2} = \frac{\sin(2\alpha)}{2}$$

Opção(D)

6. O polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 6 do número complexo w é um hexágono regular.

   Podemos decompor o hexágono regular em 6 triângulos equiláteros em que o comprimento do lado do hexágono é igual ao raio da circunferência em que o hexágono está inscrito, ou seja, é igual a $|z|$.

   Calculando o módulo do número complexo z:

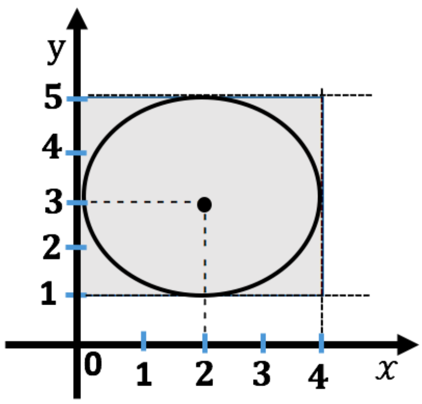
   $$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

   Logo o perímetro do polígono é igual a:

   $$P = 6 \times 5 = 30$$

   Opção(C)

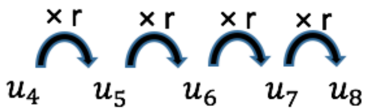
7. Vamos começar por representar, num referencial o.n. xOy, o quadrado definido pela condição $0 \leq x \leq 4 \wedge 1 \leq y \leq 5$, bem como a circunferência inscrita neste quadrado.



   Concluímos que a circunferência tem centro de coordenadas $(2, 3)$ e raio igual a 2.

   Opção(C)

8. Sabemos que u_n é uma progressão geométrica.



Logo temos que:

$$u_8 = u_4 \times r^4 \;\Leftrightarrow\; 8192 = 32 \times r^4 \;\Leftrightarrow\; r = \pm\sqrt[4]{\frac{8192}{32}} \;\Leftrightarrow\; r = 4 \quad (r > 0)$$

Conhecendo a razão da progressão geométrica conseguimos determinar o quinto termo da sucessão:

$$u_{n+1} = u_n \times r \;\Leftrightarrow\; u_5 = u_4 \times r \;\Leftrightarrow\; u_5 = 32 \times 4 \;\Leftrightarrow\; u_5 = 128$$

Opção(B)

Grupo II

1.

1.1. Consideremos os acontecimentos:

A: A soma dos números das fichas retiradas é igual a 10
B: O produto dos números das fichas retiradas é ímpar

No contexto da situação descrita, $P(B|A)$ é a probabilidade do produto dos números das fichas retiradas ser ímpar sabendo que a soma dos números das fichas retiradas é igual a 10.

O número de casos possíveis é igual ao número de pares de fichas em que a soma dos números das fichas retiradas é igual a 10, ou seja, são 4 pares: (1,9);(2,8);(3,7) e (4,6).

O número de casos favoráveis é igual ao número de pares de fichas dos casos possíveis em que o produto dos números das fichas retiradas é ímpar: (1,9) e (3,7).

Assim usando a Regra de LaPlace:

$$P(B|A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

1.2. No total existem 9 fichas (todas diferentes), quatro com número par e cinco com número ímpar.

No tabuleiro existem 4 filas horizontais logo o número de formas que existem para dispor as quatro fichas com números pares (todas diferentes entre si) no tabuleiro, ocupando uma única fila horizontal é igual a $4 \times 4!$.

Depois de colocadas as fichas pares restam $16 - 4 = 12$ posições disponíveis no tabuleiro que podem ser ocupadas por fichas com número ímpar. O número de formas que existem para dispor as cinco fichas com números ímpares (todas diferentes entre si) nas restantes posições do tabuleiro é igual a ${}^{12}A_5$

Assim o número de maneiras diferentes de dispor as nove fichas de forma que as que têm número par ocupem uma única fila horizontal do tabuleiro é:

$$4 \times 4! \times {}^{12}A_5 = 9123840$$

2. Vamos simplificar e escrever na forma trigonométrica o número complexo z.

O número complexo $-1+i$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares (2º quadrante) e $|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$.

Ou seja, $-1+i = \sqrt{2}cis(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}cis(\frac{3\pi}{4})$

$z = \frac{-1+i}{(\rho cis\theta)^2} = \frac{\sqrt{2}cis(\frac{3\pi}{4})}{\rho^2 cis(2\theta)} = \frac{\sqrt{2}}{\rho^2}cis(\frac{3\pi}{4} - 2\theta)$

O número complexo $w = -\sqrt{2}i$ pertence ao semieixo imaginário negativo ($\text{Arg}(w) = \frac{3\pi}{2}$) e $|w| = \sqrt{2}$.

$w = -\sqrt{2}i = \sqrt{2}cis(\frac{3\pi}{2})$

Como $z = w$ temos:

$|z| = |w| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\rho^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \rho^2 = 1 \Leftrightarrow \rho = 1 \quad (\rho > 0)$

$\text{Arg}(z) = \text{Arg}(w) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} - 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} - 2k\pi,$ $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\theta = -\frac{3\pi}{4} - 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\frac{3\pi}{8} - k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Para $k=0,\ \ \theta=-\frac{3\pi}{8}\ \ \notin]0,\pi[$

Para $k=1,\ \ \theta<0\ \ \notin]0,\pi[$

Para $k=-1,\ \ \theta=-\frac{3\pi}{8}+\pi=\frac{5\pi}{8}\ \ \in]0,\pi[$

Para $k=-2,\ \ \theta=-\frac{3\pi}{8}+2\pi=\frac{13\pi}{8}\ \ \notin]0,\pi[$

O valor de $\theta\ \in]0,\pi[$ e ρ para o qual $z=w$ é $\theta=\frac{5\pi}{8}$ e $\rho=1$.

3.

3.1. O vetor normal do plano α é um vetor diretor da reta perpendicular a este plano.

Logo o vetor diretor da reta tem coordenadas $(3,2,4)$.

Uma equacão vetorial da reta que tem vetor diretor de coordenadas $(3,2,4)$ e passa no ponto C é:

$$(x,y,z)=(2,1,4)+k(3,2,4),\quad k\in\mathbb{R}$$

3.2. Vamos começar por escrever as equações cartesianas da reta OD.

O vetor diretor da reta OD é:

$$\overrightarrow{OD}=D-O=(4,2,2)-(0,0,0)=(4,2,2)$$

As equações cartesianas desta reta OD são da forma:

$$\frac{x-0}{4}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-0}{2}\ \Leftrightarrow\ \frac{x}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$$

Para calcular as coordenadas do ponto de intersecção da reta OD com o plano α temos de resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases}3x+2y+4z-12=0\\ \frac{x}{4}=\frac{y}{2}\\ \frac{z}{2}=\frac{y}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2y+4z-12=0\\ x=2y\\ z=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\times 2y+2y+4y-12=0\\ ------------\\ ------------\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12y = 12 \\ ----- \\ ----- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

O plano α e a reta OD intersectam-se no ponto de coordenadas $(2, 1, 1)$.

3.3. O ponto A pertence ao semieixo positivo Ox por isso tem ordenada e cota nulas, substituindo na equação do plano α os valores da ordenada e cota podemos calcular o valor da abcissa do ponto A:

$$3x + 2y + 4z - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; x + 0 + 0 - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 12$$

Logo o ponto A tem coordenadas $(2, 0, 0)$.

O ponto B pertence ao semieixo positivo Oy por isso tem abcissa e cota nulas, substituindo na equação do plano α os valores da abcissa e cota podemos calcular o valor da ordenada do ponto B:

$$3x + 2y + 4z - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 + 2y + 0 - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 6$$

Assim, o ponto B tem coordenadas $(0, 6, 0)$.

Como o ponto P pertence ao eixo Oz então tem abcissa e ordenada nulas, assim as coordenadas do ponto P são:

$$\mathrm{P}(0, 0, z), \quad \text{onde } z \in R\backslash\{0\}$$

As coordenadas do vetor $\overrightarrow{PA}$ são:

$$\overrightarrow{PA} = A - P = (2, 0, 0) - (0, 0, z) = (2, 0, -z)$$

As coordenadas do vetor $\overrightarrow{PB}$ são:

$$\overrightarrow{PB} = B - P = (0, 6, 0) - (0, 0, z) = (0, 6, -z)$$

Calculando o produto escalar dos dois vetores vem que:

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = (2, 0, -z).(0, 6, -z) = 0 + 0 + (-z)^2 = z^2 > 0 \qquad , \forall z \in R\backslash\{0\}$$

Como o produto escalar dos vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ é positivo então o ângulo APB é agudo.

4.

4.1. $D_f =]-\frac{\pi}{2}, +\infty[$, logo só poderá existir uma assíntota oblíqua de equação $y = mx + b$ quando $x \to +\infty$.

► $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} = 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 1 - 0 = 1$
(Limite notável)

► $b = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln x - x = \lim\limits_{x\to+\infty} -\ln x = -\infty$

Como o valor de b não é finito então não existe assíntota oblíqua quando $\to +\infty$.

4.2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f para $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$:

$f'(x) = (\frac{2+\sin x}{\cos x})' = \frac{(\cos x)(\cos x)-(-\sin x)(2+\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+2\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1+2\sin x}{\cos^2 x}$

Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1+2\sin x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\sin x = 0 \wedge \cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \wedge \cos x \neq 0$ (Como $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ então $\cos x > 0$) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Para $k = -1,\ x = -\frac{\pi}{6} - 2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} - 2\pi \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -\frac{13\pi}{6} \notin]-\frac{\pi}{2}, 0[\vee x = -\frac{5\pi}{6} \notin]-\frac{\pi}{2}, 0[$

Para $k = 0,\ x = -\frac{\pi}{6} \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\vee x = \frac{7\pi}{6} \notin]-\frac{\pi}{2}, 0[$

Para $k = 1,\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{11\pi}{6} \notin]-\frac{\pi}{2}, 0[\vee x = \frac{19\pi}{6} \notin]-\frac{\pi}{2}, 0[$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		0
$f'(x)$	n.d.	-	0	+	n.d.
$f(x)$	n.d.	$\searrow$	Mínimo	$\nearrow$	n.d.

O gráfico de f é decrescente no intervalo $]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}]$, é crescente no intervalo $[-\frac{\pi}{6},0[$ e tem um mínimo para $x=-\frac{\pi}{6}$.

4.3. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f para $x>0$:

$$f'(x)=(x-\ln x)'=1-\frac{1}{x}$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$ é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m=f'(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{\frac{1}{2}}=1-2=-1$$

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f é da forma:

$$y=x+b$$

Substituindo as coordenadas do ponto $(\frac{1}{2},f(\frac{1}{2}))$ (que pertence à reta) na equação da reta tangente, conseguimos determinar a constante b:

$$y=-x+b \;\Leftrightarrow\; f(\tfrac{1}{2})=-\tfrac{1}{2}+b \;\Leftrightarrow\; \tfrac{1}{2}-\ln\tfrac{1}{2}=-\tfrac{1}{2}+b \;\Leftrightarrow\; \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}-\ln 2^{-1}=b \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1-(-1)\ln 2=b \;\Leftrightarrow\; b=1+\ln 2$$

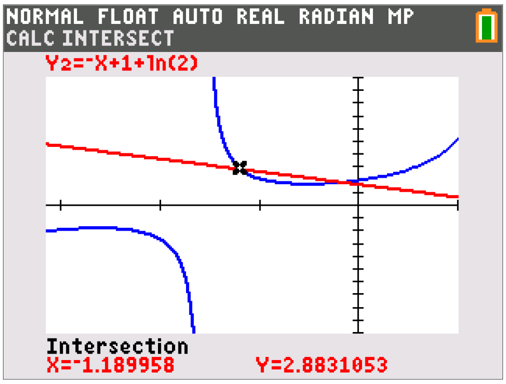
Assim, a equação reduzida da reta r é:

$$y=-x+1+\ln 2$$

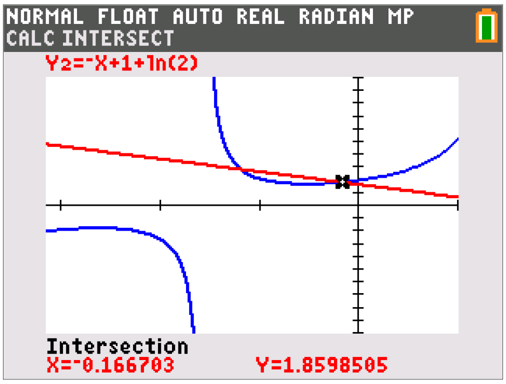
Como a reta r intersecta o gráfico de f em dois pontos, A e B, cujas abcissas pertencem ao intervalo $]-\frac{\pi}{2},0[$, então temos que:

$$\frac{2+\sin x}{\cos x}=-x+1+\ln 2$$

Recorrendo à calculadora gráfica, vamos determinar as abcissas dos pontos A e B:



$x_A \approx -1,19$



$x_B \approx -0,17$

5.

5.1. Substituindo na equação $p = 24$, conseguimos calcular a n:

$p = \frac{600 \times 0{,}003}{1-e^{-0{,}003n}} \Leftrightarrow 24 = \frac{1{,}8}{1-e^{-0{,}003n}} \Leftrightarrow 1 - e^{-0{,}003n} = \frac{1{,}8}{24} \Leftrightarrow e^{-0{,}003n} = 1 - \frac{1{,}8}{24} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -0,003n = \ln(1 - \frac{1{,}8}{24}) \Leftrightarrow n = -\frac{\ln(1-\frac{1{,}8}{24})}{0{,}003} \Leftrightarrow n \approx 26$

Assim concluímos que o empréstimo será pago em 26 meses.

5.2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{600x}{1-e^{-nx}} = 600 \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{-(e^{-nx}-1)} = -600 \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{e^{-nx}-1} = \frac{-600}{-n} \lim\limits_{-nx\to 0} \frac{-nx}{e^{-nx}-1} =$
$= \frac{600}{n} \times \frac{1}{\lim\limits_{-nx\to 0} \frac{e^{-nx}-1}{-nx}} = \frac{600}{n} \times \frac{1}{1} = \frac{600}{n}$ (Limite notável)

Quando taxa de juro tende para zero ($x \to 0$), a prestação mensal a ser paga é aproximadamente $\frac{600}{n}$, o que corresponde a pagar o montante do empréstimo em n parcelas iguais, durante n meses.

6. Seja h uma função tal que:

$$h(x) = g(x) - x - 1$$

Queremos provar que $h(x) = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]a, g(a)[$.

A função h é contínua em $\mathbb{R}$ pois resulta de operações de funções contínuas neste intervalo. Logo h também é contínua em $[a, g(a)]$, porque $[a, g(a)] \subset \mathbb{R}$.

Calculando os valores de $h(a)$ e $h(g((a))$:

► $h(a) = g(a) - a - 1$
Sabendo que $g(a) > a + 1$, temos que $h(a) > a + 1 - a - 1 \Leftrightarrow h(a) > 0$

► $h(g(a)) = g(g(a)) - a - 1$
Como g o g$(a) = g(g(a)) = a$, temos que $h(g(a)) = a - a - 1 = -1 < 0 \Leftrightarrow h(a) > 0$

Assim temos que: $h(a) \times h(g(a)) < 0$

Pelo corolário do Teorema de Bolzano a função h tem pelo menos um zero em $]a, g(a)[$, isto é, a equação $h(x) = 0$ tem, pelo menos, uma solução em $]a, g(a)[$. Assim concluímos que a equação $g(x) = x + 1$ é possível no intervalo $]a, g(a)[$.