Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2ª Fase | Versão 1 | Ensino Secundário | 2015

Grupo I

1. Sabendo que a soma das probabilidades é igual a 1 podemos determinar a constante a:

$$a + 2a + 0,4 = 1 \;\Leftrightarrow\; 3a = 1 - 0,4 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{0,6}{3} \;\Leftrightarrow\; a = 0,2$$

Assim, O valor médio da variável aleatória X é:

$$\mu = 1 \times 0,2 + 2 \times 2 \times 0,2 + 3 \times 0,4 = 2,2$$

Opção(B)

2. Considerando que a bola retirada do saco tem um número par então sabemos que a bola retirada só pode ser uma das bolas com os números: 2,4,6 ou 8. Destas bolas apenas 2 têm cor preta.

Usando a Regra de Laplace, a probabilidade de que, retirando ao acaso uma bola do saco, ela seja preta sabendo que tem um número par é igual a:

$$P(A|B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Opção(B)

3. Usando as propriedades dos logaritmos vem que:

$$log_a(a^2b) = log_a a^2 + log_a b = 2log_a a + \frac{log_b b}{log_b a} = 2 \times 1 + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 2 + 3 = 5$$

Opção(D)

4. Dado que a função f é contínua em $\mathbb{R}$, é contínua em $x = 0$ logo vem que:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

Como $f(0) = 2 + e^k$ temos:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2 + e^k \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to 0^+} \frac{2x+\ln(x+1)}{x} = 2 + e^k \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{x} + \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 2 + e^k \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; 2 + \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 2 + e^k \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = e^k \;\Leftrightarrow\; 1 = e^k \;\Leftrightarrow\; k = 0$
(Limite notável)

Opção(A)

5. Vamos determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função $f(x)$:

$$f'(x) = (3\sin^2 x)' = 3(\sin^2 x)' = 3(2\sin x \times \cos x) = 3\sin(2x)$$

A expressão algébrica da segunda derivada da função $f(x)$ é:

$$f''(x) = [3\sin(2x)]' = 3[\sin(2x)]' = 3[2\cos(2x)] = 6[\cos(2x)]$$

Opção(C)

6. Sabendo que o triângulo $[OAB]$ é equilátero e que o ponto A pertence tem abcissa igual a 1, vem que:

$$\overline{OB} = 1 \;\Leftrightarrow\; |z| = 1$$

Podemos então excluir as opções de resposta A e C.

Dado que o triângulo $[OAB]$ é equilátero e que a imagem geométrica de z pertence ao 4º quadrante, temos que:

$$arg(z) = -\frac{\pi}{3} \;\Leftrightarrow\; arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{3} \;\Leftrightarrow\; arg(z) = \frac{5\pi}{3}$$

Opção(D)

7. Vamos começar por calcular os pontos em que a circunferência intersecta o eixo Ox, substituindo $y = 0$ na equação da circunferência:

$$x^2 + (y-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + (0-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

Como o ponto A tem abcissa positiva, as suas coordenadas são $(1, 0)$.

A reta tangente à circunferência no ponto A é perpendicular à reta CA então o declive da reta r é igual ao simétrico do inverso do declive da reta CA:

$$m_r = -\frac{1}{m_{CA}} \Leftrightarrow m_r = -\frac{1}{\frac{1-0}{0-1}} \Leftrightarrow m_r = -\frac{1}{-1} \Leftrightarrow m_r = 1$$

Portanto, a equação reduzida da reta r é da forma: $y = x + b$

Substituindo as coordenadas do ponto A na equação da reta r podemos determinar a constante b:

$$y = x + b \Leftrightarrow 0 = 1 + b \Leftrightarrow b = -1$$

Opção(B)

8. $(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ -1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

Logo$(-1)^n$ é uma sucessão limitada mas não é monótona.

A sucessão $(-1)^n.n$ também não é monótona visto que $u_2 > u_1$ mas $u_3 < u_2$.

A sucessão $1 + n^2$ não é limitada porque $\lim 1 + n^2 = 1 + (+\infty)^2 = +\infty$.

Opção(C)

Grupo II

1. Vamos começar por simplificar o número complexo z_1:

$z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{2})}$

O número complexo $-1+i$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares (2º quadrante) e $|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$.

Ou seja, $-1+i = \sqrt{2}cis(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}cis(\frac{3\pi}{4})$

$z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{2})} = \frac{\sqrt{2}cis(\frac{3\pi}{4})}{\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{2})} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}cis(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{12}) = cis(\frac{8\pi}{12}) = cis(\frac{2\pi}{3})$

Logo, $\overline{z_1} = cis(-\frac{2\pi}{3})$

Como $z^4 = \overline{z_1}$, através da fórmula de Moivre:

$z = \sqrt[4]{cis(-\frac{2\pi}{3})} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{1}cis(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}), \quad k \in \{0,1,2,3\} \Leftrightarrow z = cis(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4})$, $k \in \{0,1,2,3\}$

Para $k=0$, $z_1 = cis(-\frac{2\pi}{12}) = cis(-\frac{\pi}{6})$

Para $k=1$, $z_2 = cis(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}) = cis(\frac{4\pi}{12}) = cis(\frac{\pi}{3})$

Para $k=2$, $z_3 = cis(\frac{-\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}) = cis(\frac{10\pi}{12}) = cis(\frac{5\pi}{6})$

Para $k=3$, $z_4 = cis(\frac{-\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}) = cis(\frac{16\pi}{12}) = cis(\frac{4\pi}{3})$

2.

2.1. Como no instante em que se iniciou a contagem do tempo, o ponto P coincidia com o ponto A então a distância do ponto O ao ponto A é igual a:

$$d(0) = 1 + \frac{1}{2}\sin(0+\frac{\pi}{6}) = 1 + \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{6})$$

Vamos determinar os instantes em que a distância do ponto O ao ponto P é igual à distância do ponto O ao ponto A quanto $t \in]0,3]$:

$1+\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{6}) = 1+\frac{1}{2}\sin(\pi t+\frac{\pi}{6}) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}\sin(\pi t+\frac{\pi}{6}) \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \sin(\frac{\pi}{6}) = \sin(\pi t+\frac{\pi}{6}) \;\Leftrightarrow\; \pi t+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}+2k\pi \;\vee\; \pi t+\frac{\pi}{6} = \pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \pi t = 2k\pi \;\vee\; \pi t = \frac{4\pi}{6}+2k\pi \;\Leftrightarrow\; t = 2k \;\vee\; t = \frac{2}{3}+2k,\; k\in\mathbb{Z}$

Para $k=-1,\; t=-2 \notin]0,3] \vee t=-\frac{4}{3} \notin]0,3]$

Para $k=0,\; t=0 \notin]0,3] \vee t=\frac{2}{3} \in]0,3]$

Para $k=1,\; t=2 \in]0,3] \vee t=\frac{8}{3} \in]0,3]$

Para $k=2,\; t=4 \notin]0,3] \vee t=\frac{14}{3} \notin]0,3]$

Durante os primeiros três segundos do movimento, o ponto P passou pelo ponto A nos instantes $t_1=\frac{2}{3}$ segundos, $t_2=2$ segundos e $t_3=\frac{8}{3}$ segundos.

2.2. A função d é contínua em $[0,+\infty[$ pois resulta de operações de funções contínuas neste intervalo. Logo $d(t)$ também é contínua em $[3,4]$ porque $[3,4]\subset[0,+\infty[$.

Calculando os valores de $d(3)$ e $d(4)$:

$$d(3) = 1+\frac{1}{2}\sin(3\pi+\frac{\pi}{6}) = 1+\frac{1}{2}\sin(\pi+\frac{\pi}{6}) = 1-\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$d(4) = 1+\frac{1}{2}\sin(4\pi+\frac{\pi}{6}) = 1+\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{5}{4} = 1,25$$

Assim temos que: $d(3) < 1,1 < d(4)$

Pelo Teorema de Bolzano existe uma constante $c \in]3,4[$ tal que $d(c)=1,1$, isto é, houve pelo menos, um instante, entre os três segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do ponto P ao ponto O foi igual a 1,1 metros.

3.

3.1. Vamos verificar se existem assíntotas horizontais:

► $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x-3)-\ln(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\frac{x-3}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1-\frac{3}{x}) =$
$= \ln(1-\frac{3}{+\infty}) = \ln(1-0^+) = \ln 1 = 0$

Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, então a reta $y = 0$ é assíntota horizontal da função f quando $x \to +\infty$.

► $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 + xe^x = (*_1)$

Fazendo a mudança de variável: $y = -x$ $\;(y \to +\infty$ quando $x \to -\infty)$

$(*_1) = \lim_{y\to+\infty} 1 - ye^{-y} = 1 - \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1$ (Limite notável)

Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, então a reta $y = 1$ é assíntota horizontal da função f quando $x \to -\infty$.

3.2. Vamos resolver a inequação $f(x) - 2x > 1$ no intervalo $]-\infty, 3[$, isto é, no ramo onde a função f é válida para $x \leq 3$:

$f(x) - 2x > 1 \;\Leftrightarrow\; 1 + xe^x - 2x > 1 \;\Leftrightarrow\; xe^x - 2x > 0 \;\Leftrightarrow\; x(e^x - 2) > 0$

Construindo um quadro de sinal, temos:

x	$-\infty$	0		$\ln 2$		3
x	-	0	+	+	+	+
$e^x - 2$	-	-	-	0	+	+
$x(e^x - 2)$	+	0	-	0	+	+

Logo, C.S $=]-\infty, 0[\,\cup\,]\ln 2, 3[$

3.3. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f para $x > 4$:

$$f'(x) = [\ln(x-3) - \ln x]' = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abssica 4 é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m = f'(4) = \frac{1}{4-3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f é da forma:

$$y = \frac{3}{4}x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto $(4, f(4))$ (que pertence à reta) na equação da reta tangente, conseguimos determinar a constante b:

$y = \frac{3}{4}x + b \;\Leftrightarrow\; \ln(4-3) - \ln 4 = \frac{3}{4} \times 4 + b \;\Leftrightarrow\; b = \ln 1 - \ln 4 - 3 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; b = -\ln 4 - 3$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 4 é:

$$y = \frac{3}{4}x - \ln 4 - 3$$

4. O gráfico A não pode ser o gráfico da função f porque tem um ponto em que a função não é contínua, ou seja, tem um ponto onde a função não tem derivada, enquanto que a função f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio.

   O gráfico B não pode ser o gráfico da função f porque porque tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]-\infty, 0[$ portanto neste intervalo a segunda derivada é positiva, enquanto que $f''(x) < 0$ para $x \in]-\infty, 0[$.

   O gráfico C não pode ser o gráfico da função f porque a reta tangente em $x = 0$ tem declive negativo , isto é, a primeira derivada é negativa em $x = 0$, enquanto que na função f sabemos que $f'(0) > 0$.

5. $P(A\cup\overline{B}) - 1 + P(B) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A\cap\overline{B}) - 1 + P(B) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A\cap\overline{B}) - 1 + 1 - P(\overline{B}) = P(A) - P(A\cap\overline{B}) = P(A) - (P(A) - P(A\cap B)) = P(A\cap B)) = P(A) \times P(B|A)$ c.q.d.

6.

   6.1. O vértice V coincide com o centro geométrico da face [URST] do cubo, ou seja, o vértice V tem de coordendas $(1, 1, z)$, $\quad z \in \mathbb{R}$.

Como o ponto V pertence ao plano PQV, substituindo na equação do plano PQV o valor da abcissa podemos calcular o valor da cota do ponto V:

$$6x + z - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; 6 \times 1 + z - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 6$$

Logo o vértice V tem coordenadas $(1, 1, 6)$.

6.2. O vetor $\overrightarrow{OR}$ é um vetor normal do plano perpendicular à reta OR.

Com as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e R podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OR}$:

$$\overrightarrow{OR} = R - O = (2, 2, 2) - (0, 0, 0) = (2, 2, 2)$$

Assim, uma equação do plano perpendicular à reta OR é da forma:

$$2x + 2y + 2z + d = 0$$

Substituindo as coordenadas do ponto P na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$2x + 2y + 2z + d = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 \times 2 + 0 + 0 + d = 0 \;\Leftrightarrow\; d = -4$$

Assim, uma equação do plano perpendicular à reta OR que passa no ponto P é:

$$2x + 2y + 2z - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x + y + z - 2 = 0$$

6.3. O ponto A pertence ao plano QRS e tem cota igual ao cubo da abcissa, isto é, o ponto A tem de coordendas $(x, 2, x^3), \quad x \in \mathbb{R}$.

Com as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e A podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OA}$:

$$\overrightarrow{OA} = A - O = (x, 2, x^3) - (0, 0, 0) = (x, 2, x^3)$$

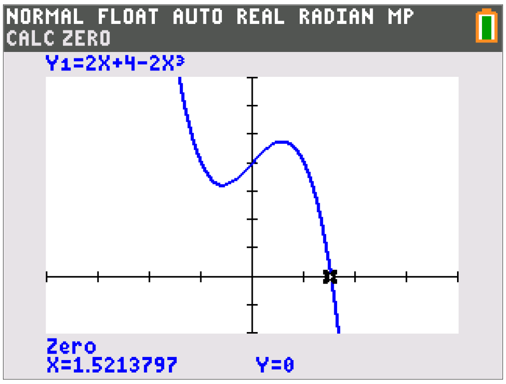
Sabendo que T$(0, 0, 2)$ e Q$(2, 2, 0)$, podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{TQ}$:

$$\overrightarrow{TQ} = Q - T = (2, 2, 0) - (0, 0, 2) = (2, 2, -2)$$

Como os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$ são perpendiculares, o seu produto escalar é nulo:

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{TQ} = 0 \Leftrightarrow (x, 2, x^3).(2, 2, -2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 - 2x^3 = 0 \quad \text{onde } x \in \mathbb{R}$$

Recorrendo à calculadora gráfica, vamos inserir a função $y_1 = 2x + 4 - 2x^3$ utilizando a janela de visualização sugerida ($x \in [-4, 4]$ e $y \in [-2, 7]$).



Assim temos que o zero da função é $x \approx 1,52$.

6.4. Consideremos o acontecimento A: "O poliedro ficar com exatamente duas faces brancas, ambas triangulares, exatamente duas faces azuis, ambas quadradas, e as restantes faces coloridas com cores todas diferentes".

O número de casos possíveis é igual ao número de hipóteses que temos para pintar as 9 faces do poliedro com a 7 cores, sendo que vamos ter de repetir cores, ou seja, é igual a ${}^9A'_7 = 7^9$.

O número de hipóteses diferentes para pintarmos de branco 2 das 4 faces triangulares do poliedro é igual a ${}^4C_2$.

O número de hipóteses diferentes para pintarmos de azul 2 das 5 faces quadradas do poliedro é igual a ${}^5C_2$.

O número de hipóteses que temos para pintar as restantes 5 faces do poliedro (cada uma com uma cor diferente) com as $7 - 2 = 5$ cores que nos restam é igual a ${}^5A_5 = 5!$.

Assim o número de casos favoráveis é igual a ${}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!$.

Usando a Regra de LaPlace:

$$P(\text{A}) = \frac{{}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!}{7^9} \approx 0,0002$$