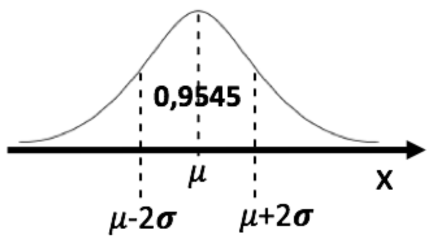
Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2ª Fase | Ensino Secundário | 2018

Caderno 1

1.

1.1. Sabendo que $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$, podemos traçar o gráfico da variável X que segue uma distribuição normal :



Logo, $P(X > \mu - 2\sigma) \approx 1 - \frac{1-0,9545}{2} \approx 0,977$.

Opção(C)

1.2. Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^o temos que:

$$A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B = 180 \Leftrightarrow B\hat{C}A = 180 - 57 - 81 \Leftrightarrow B\hat{C}A = 42^o$$

Usando a Lei dos Senos, vem que:

$$\frac{\sin(A\hat{B}C)}{\overline{AC}} = \frac{\sin(B\hat{C}A)}{\overline{AB}} = \frac{\sin(C\hat{A}B)}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \frac{\sin(81^o)}{5} = \frac{\sin(42^o)}{\overline{AB}} = \frac{57^o)}{\overline{CB}}$$

Logo, $\overline{AB} = \frac{5\sin(42^o)}{\sin(81^o)} \approx 3,39$

Opção(C)

2. Consideremos os acontecimentos:

   A: O atleta pratica basquetebol
   B: O atleta pratica futebol

   Sabemos que:

   $P(A) = \frac{1}{5} \qquad P(B) = \frac{2}{5} \qquad P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{3}{4}$

   Usando a fórmula da probabilidade condicionada vem que:

   $$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{1-\frac{2}{5}} \Leftrightarrow P(\overline{A}\cap\overline{B}) = \frac{3}{4}\times\frac{3}{5} \Leftrightarrow P(\overline{A}\cap\overline{B}) = \frac{9}{20}$$

   Recorrendo às Leis de Morgan temos que:

   $$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = \frac{9}{20}$$

   Como $P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B)$, então $P(A\cup B) = 1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$

   Calculando a probabilidade da interseção dos dois acontecimentos:

   $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow \frac{11}{20} = \frac{1}{5}+\frac{2}{5}-P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A\cap B) = \frac{3}{5}-\frac{11}{20} \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow P(A\cap B) = \frac{1}{20}$

   Concluímos que $P(A\cap B) > 0$ logo existe pelo menos um atleta do clube que pratica as duas modalidades desportivas.

3.

   3.1. Para a primeira posição do código de quatro caracteres, existem 5 hipóteses que correspondem às 5 vogais.

   Para as restantes 3 posições do código, temos 9 algarismos disponíveis. Tendo em conta que os algarismos não se repetem temos $9\times 8\times 7 = 504$ maneiras diferentes de os selecionar.

Logo podemos formar $5 \times 504 = 2520$ códigos iniciados por uma vogal seguida de três algarismos diferentes.

Opção(D)

3.2. O número de casos possíveis é igual ao número de arranjos com repetição da seleção de 4 dos 14 caracteres disponíveis, ou seja, ${}^{14}A_4^{\prime} = 14^4$.

Para que produto dos quatro algarismos diferentes seja um número ímpar, todos os quatro algarismos têm ser ímpares . De 1 a 9 temos 5 algarismos ímpares, portanto o número de casos favoráveis é igual a $5 \times 4 \times 3 \times 2$.

Usando a regra de Laplace:

P(Código ser constituído por quatro algarismos diferentes cujo produto é um número ímpar)= $\frac{5\times4\times3\times2}{14^4} \approx 0,003$

4.

4.1. Através da condição que define a reta r, sabemos que o seu vetor diretor tem coordenadas $(4, 1, -2)$.

Como o plano é perpendicular à reta r, o vetor $(4, 1, -2)$ é um vetor normal do plano. Assim a equação do plano é da forma: $4x + y - 2z + d = 0$.

Como o ponto P pertence à superfície esférica, substituindo na equação da superfície esférica os valores da abcissa e ordenada podemos calcular o valor da cota do ponto P:

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 10 \ \Leftrightarrow \ (1-1)^2 + (3-2)^2 + (z+1)^2 = 10 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \ (z+1)^2 = 9 \ \Leftrightarrow \ z+1 = \pm\sqrt{9} \ \Leftrightarrow \ z = \pm 3 - 1 \ \Leftrightarrow \ z = -4,$ porque o ponto P tem cota negativa

Assim, o ponto P tem coordenadas $(1, 3, -4)$.

Substituindo as coordenadas do ponto P na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$4x + y - 2z + d = 0 \ \Leftrightarrow \ 4 + 3 + 8 + d = 0 \ \Leftrightarrow \ d = -15$$

Logo, $\alpha : 4x + y - 2z - 15 = 0.$

4.2. Sabendo as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e C $(1, 2, -1)$ podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{OC} = C - O = (1, 2, -1) - (0, 0, 0) = (1, 2, -1)$$

$$||\overrightarrow{OC}|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Com as coordenadas dos pontos O (origem do referencial) e A$(1, 2, 1)$ podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OA}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{OA} = A - O = (1, 2, 1) - (0, 0, 0) = (1, 2, 1)$$

$$||\overrightarrow{OA}|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

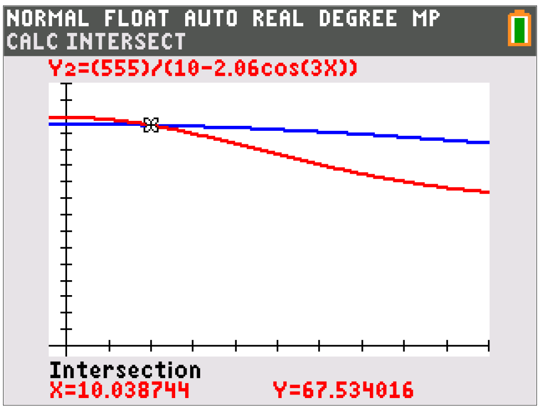
Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$$\cos(\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}) = \frac{\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}}{||\overrightarrow{OC}|| \times ||\overrightarrow{OA}||} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}) = \frac{(1,2,-1).(1,2,1)}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}) =$$
$$= \frac{1+4-1}{6} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}) = \frac{4}{6} \Leftrightarrow A\hat{O}C = \cos^{-1}(\tfrac{2}{3}) \Leftrightarrow A\hat{O}C \approx 48^o$$

5. "Passado algum tempo a amplitude do ângulo ASM é três vezes maior e a distância do planeta Mercúrio ao Sol diminuiu 3%"o que corresponde à equação:

$$d(\alpha) - 0,03d(\alpha) = d(3\alpha) \Leftrightarrow \frac{555}{10-2,06\cos\alpha}(1-0,03) = \frac{555}{10-2,06\cos 3\alpha} \Leftrightarrow \frac{555}{10-2,06\cos\alpha} \times 0,97 =$$
$$= \frac{555}{10-2,06\cos 3\alpha} \Leftrightarrow \frac{538,35}{10-2,06\cos\alpha} = \frac{555}{10-2,06\cos 3\alpha}$$

Recorrendo à calculadora gráfica e fazendo a interseção das duas funções da equação acima, temos:

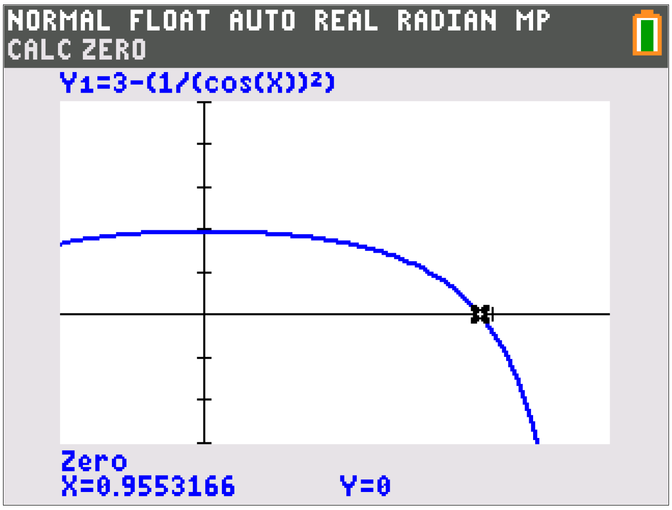


Como $0 < \alpha < 20$, temos que $\alpha \approx 10^o$.

6. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função f:

$$f''(x) = (3x - \tan x)' = 3 - \frac{1}{\cos^2 x}$$

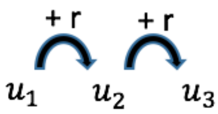
Os pontos de inflexão de f correspondem aos zeros da segunda derivada, logo recorrendo à calculadora gráfica, vamos determinar a solução da equação $3 - \frac{1}{\cos^2 x} = 0$ no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$:



O ponto de inflexão da função f no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, tem abcissa aproximadamente igual a $0,96$.

Opção(D)

7. Sabemos que u_n é uma progressão aritmética.



Logo temos que:

$$u_3 = u_1 + 2r \iff 4 = u_1 + 2r \iff u_1 = 4 - 2r$$

Da mesma forma vem que, $u_{12} = u_1 + 11r = 4 - 2r + 11r = 4 + 9r$.

Conhecendo o valor da soma dos doze primeiros termos da progressão aritmética, conseguimos determinar a razão da progressão:

$S_{12} = \frac{u_1+u_12}{2} \times 12 \;\Leftrightarrow\; 174 = \frac{4-2r+4+9r}{2} \times 12 \;\Leftrightarrow\; 174 = \frac{(8+7r)\times 12}{2} \;\Leftrightarrow\; (8+7r) \times 12 =$
$= 2 \times 174 \;\Leftrightarrow\; 8 + 7r = \frac{348}{12} \;\Leftrightarrow\; 7r = 29 - 8 \;\Leftrightarrow\; r = \frac{21}{7} \;\Leftrightarrow\; r = 3$

Logo o termo geral desta progressão aritmética é:

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r \;\Leftrightarrow\; u_n = 4 - 6 + (n-1) \times 3 \;\Leftrightarrow\; u_n = -2 + (n-1) \times 3$$

Para averiguarmos se 5371 é termo da sucessão (u_n), vamos resolver a seguinte equação:

$u_n = 5371 \Leftrightarrow -2+(n-1)\times 3 = 5371 \Leftrightarrow (n-1)\times 3 = 5371+2 \Leftrightarrow (n-1)\times 3 = 5373 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; n = \frac{5373}{3} + 1 \;\Leftrightarrow\; n = 1792$

Como $n \in \mathbb{N}$, concluímos que 5371 é o termo de ordem 1792 da sucessão (u_n).

8. Consideremos z_2 o número complexo cujo afixo é o ponto C. De acordo com a figura 3, o ponto C pertence ao semieixo real negativo bem como à circunferência de raio igual a 1, logo $z_2 = -1$.

   Como z e z_2 são ambos raízes de índice 5 do mesmo número complexo, vem que:

$$z^5 = z_1^5 = (-1)^5 = -1$$

Opção(A)

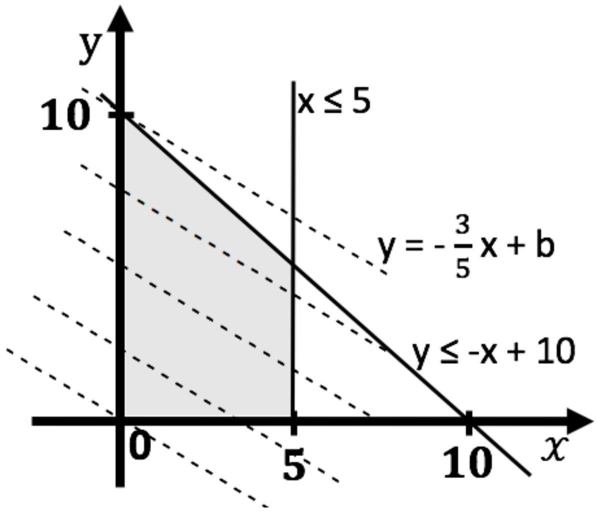
Caderno 2

9.

9.1. A reta definida pela função objetivo em ordem a y é:

$$L = 3x + 5y \Leftrightarrow -5y = 3x - L \Leftrightarrow y = \frac{3x-L}{-5} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x + \frac{L}{5}$$

De acordo com as restrições apresentadas, vamos representar a região admissível e traçar retas com o declive igual à reta definida pela função objetivo:



Pela observação da região admissível, o máximo é obtido no vértice de coordenadas $(0, 10)$.

Substituindo as coordenadas deste ponto na função objetivo, vem que:

$$L = 3x + 5y \Leftrightarrow L = 3 \times 0 + 5 \times 10 \Leftrightarrow L = 50$$

Opção(B)

9.2. Como $\overline{F_1F_2} = 2c$ temos que $c = \frac{12}{2} = 6$.

Seja P um ponto qualquer da elipse, vem que:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \Leftrightarrow 20 = 2a \Leftrightarrow a = 10$$

Sabendo as constantes a e c, podemos calcular a constante b:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$$

Assim, a equação da elipse centrada na origem e com os focos sobre o eixo Ox é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{8^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

Opção(B)

10. Vamos começar por simplificar e escrever o número complexo z na forma algébrica.

$z = \frac{(2-i)^2+1+i}{1-2i} + 3i^{15} = \frac{4-4i+i^2+1+i}{1-2i} + 3i^{15-4\times3} = \frac{(4-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} + 3i^3 = \frac{4+8i-3i-6i^2}{1^2+2^2} - 3i =$
$= \frac{10+5i}{5} - 3i = 2 + i - 3i = 2 - 2i$

$-\frac{1}{2} \times \overline{z} = -\frac{1}{2}(2+2i) = -1 - i$

Escrevendo o número complexo $-\frac{1}{2} \times \overline{z}$ na forma trigonométrica:

$$\begin{cases} \tan\,\theta = \frac{-1}{-1} \\ \theta \in 3^{o}Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\,\theta = 1 \\ \theta \in 3^{o}Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \text{ e } |-1-i| = \sqrt{2}$$

Logo, $w = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

11. A reta r tangente à circunferência é perpendicular ao raio, ou seja, à reta OA.

Sabendo as coordenadas do ponto O (origem) e do ponto A, conseguimos calcular o declive da reta OA:

$$m_{OA} = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

Como r é perpendicular à reta OA, vem que:

$$m_r = -\frac{1}{m_{OA}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

A equação da reta r é da forma: $y = -2x + b$.

Substituindo as coordenadas do ponto A na equação da reta r podemos calcular a constante b (ordenada na origem):

$$y = -2x + b \;\Leftrightarrow\; 1 = -2 \times 2 + b \;\Leftrightarrow\; b = 5$$

Opção(B)

12.

12.1. Para determinar a interseção dos planos α, β e γ vamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} y = -x \\ y = z \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = y \\ -2y + 3y - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = y \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Concluímos que o sistema é impossível pois $0 = 1$ é uma equação impossível, logo a interseção dos planos α, β e γ é o conjunto vazio.

Opção(D)

12.2. $\lim\left(\frac{n+5}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim\left[\left(\frac{n(1+\frac{5}{n})}{n(1+\frac{1}{n})}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}} = \lim\left[\frac{(1+\frac{5}{n})^n}{(1+\frac{1}{n})^n}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\lim(1+\frac{5}{n})^n}{\lim(1+\frac{1}{n})^n}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{e^5}{e}\right)^{\frac{1}{2}} = e^2$

Opção(D)

13. Usando as propriedades dos logaritmos vamos resolver a inequação:

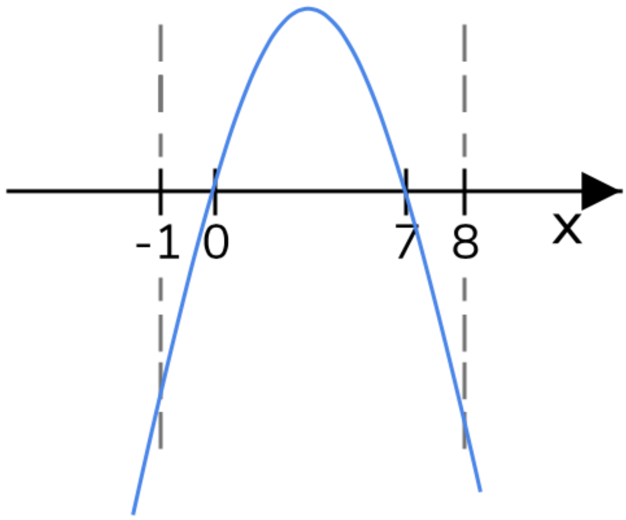
$\log_2(x+1) \leq 3 - \log_2(8-x) \;\wedge\; x+1 > 0 \;\wedge\; 8-x > 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \log_2(x+1) \leq \log_2 2^3 - \log_2(8-x) \;\wedge\; x > -1 \;\wedge\; x < 8 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \log_2(x+1) \leq \log_2(\frac{8}{8-x}) \;\wedge\; x \in]-1,8[\;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \log_2(x+1) - \log_2(\frac{8}{8-x}) \leq 0 \;\wedge\; x \in]-1,8[\;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \log_2(\frac{(x+1)(8-x)}{8}) \leq 0 \;\wedge\; x \in]-1,8[\;\Leftrightarrow\; \log_2(\frac{8x-x^2+8-x}{8}) \leq 0 \;\wedge\; x \in]-1,8[\;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \log_2(\frac{-x^2+7x+8}{8}) \leq 0 \;\wedge\; x \in]-1,8[\;\Leftrightarrow\; \frac{-x^2+7x+8}{8} \leq 2^0 \;\wedge\; x \in]-1,8[\;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ \frac{-x^2+7x+8}{8} \leq 1 \ \wedge \ x \in]-1,8[\ \Leftrightarrow \ -x^2+7x+8 \leq 8 \ \wedge \ x \in]-1,8[\ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ -x^2+7x \leq 0 \ \wedge \ x \in]-1,8[$

Calculando os zeros da parábola $-x^2+7x$, temos:

$$-x^2+7x=0 \ \Leftrightarrow \ x(-x+7)=0 \ \Leftrightarrow \ x=0 \ \vee -x+7=0 \ \Leftrightarrow \ x=0 \ \vee x=7$$

Sabendo que a parábola tem concavidade voltada para baixo pois o coeficiente de 2ºgrau é negativo, podemos representar a parábola na reta real no intervalo $]-1,8[$:



Logo, C.S.$=]-1,0] \cup [7,8[$

14.

14.1. Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, vem que:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{3+\frac{e^x}{1-x}-4}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x}{1-x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x-1(1-x)}{1-x}}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1(1-x)}{(1-x)x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1+x}{(1-x)x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{(1-x)x} + \lim_{x\to 0} \frac{x}{(1-x)x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x} . \frac{e^x-1}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1-x)} =$$
$$= \frac{1}{1-0} \times 1 + \frac{1}{1-0} = 2$$

14.2. Vamos verificar se existem assíntotas horizontais:

► $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(3+\frac{e^x}{1-x}) = 3+\frac{e^{-\infty}}{1-(-\infty)} = 3+\frac{0^+}{+\infty} = 3+0 = 3$

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$, então a reta $y = 3$ é assíntota horizontal da função f quando $x \to -\infty$.

► $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2)+2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2)}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{+\infty} =$
$= 2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} + 0 = 2\times 0 + 0 = 0$ (Limite notável)

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, então a reta $y = 0$ é assíntota horizontal da função f quando $x \to +\infty$.

14.3. Fazendo a composição das funções temos que:

$$(f o h^{-1})(2) = f(h^{-1}(2)) = f(h(x) = 2) = f(x+1 = 2) = f(1) = \frac{\ln(1^2)+2}{1} = 2$$

Opção(C)

15. O declive da reta tangente ao gráfico da função g para qualquer ponto é igual ao valor da derivada nesse ponto, logo vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função g:

$g'(x) = (2\sin x + \sin^2 x)' = 2\cos x + 2\sin x\cos x = 2\cos x + \sin(2x)$

Para determinarmos o máximo da função $g'(x)$ vamos determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função g:

$g''(x) = [2\cos x + \sin(2x)]' = -2\sin x + 2\cos(2x)$

Os extremos relativos de $g'(x)$ correspondem aos zeros de $g''(x)$, logo temos que:

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin x + 2\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \sin x \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \Leftrightarrow 2x + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x - x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Para $k = -1$, $x = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} \notin [0,\pi] \vee x = -\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{5\pi}{2} \notin [0,\pi]$

Para $k = 0$, $x = \frac{\pi}{6} \in [0,\pi] \vee x = -\frac{\pi}{2} \notin [0,\pi]$

Para $k = 1$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \in [0, \pi] \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2} \notin [0, \pi]$

Para $k = 2$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} \notin [0, \pi] \vee x = -\frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{7\pi}{2} \notin [0, \pi]$

De modo a estudarmos a monotonia da função $g'(x)$ vamos construir um quadro de sinal:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$g''(x)$	$+$	$+$	0	-	0	$+$	$+$
$g'(x)$	Mínimo	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	Mínimo	$\nearrow$	Máximo

- $g'(\frac{\pi}{6}) = 2\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

- $g'(\pi) = 2\cos\pi + \sin\pi = -2$

O declive da reta r tangente ao gráfico da função g corresponde ao máximo absoluto de $g'(x)$, logo temos que:

$$m_r = g'(\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{3\sqrt{3}}{2}$$