Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1ª Fase | Versão 1 | Ensino Secundário | 2017

Grupo I

1. Os números naturais de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9 e que são múltiplos de 5 têm na sua última posição um algarismo múltiplo de cinco, considerando os algarismos de 1 a 9 só pode ser o número 5.

$$\_\ \_\ \_\ \underline{5}$$

As restantes 3 posições anteriores podem ser ocupadas por qualquer algarismo de 1 a 9.

Logo, o número de números que são múltiplos de cinco é:

$$9 \times 9 \times 9 \times 1 = 9^3 = 729$$

Opção(A)

2. Consideremos os acontecimentos:

A: O aluno escolhido é um rapaz
B: O aluno escolhido tem olhos verdes

Usando a fórmula da probabilidade condicionadas temos:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{10}}{P(A)} \;\Leftrightarrow\; P(A) = \frac{4}{10} \;\Leftrightarrow\; P(A) = \frac{2}{5}$$

Usando a regra de Laplace:

$$P(A) = \frac{nr\ de\ rapazes}{nr\ total\ de\ alunos} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{nr\ de\ rapazes}{20} \Leftrightarrow nr\, de\, rapazes = \frac{20 \times 2}{5} \Leftrightarrow nr\, de\, rapazes = 8$$

Opção(B)

3. De acordo com a figura 1 podemos construir o quadro de sinal da segunda derivada da função f:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	P.I.	$\smile$

Assim temos que:

$$f''(1) > 0 \text{ e } f''(2) > 0 \Rightarrow f''(1) \times f''(2) > 0$$

Opção(D)

4. A reta de equação $y = -x$ é assímptota oblíqua da função f de domínio $\mathbb{R}^+$ por isso vem que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

A reta de equação $y = -x$ também é assímptota oblíqua da função g de domínio $\mathbb{R}^+$ por isso vem que:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$

Assim temos que:

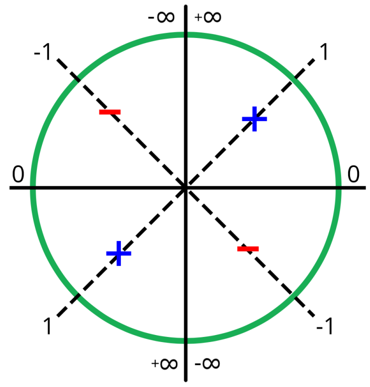
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) \times g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x \to +\infty} g(x) = -1 \times -\infty = +\infty$$

Opção(A)

5. Vamos determinar os ângulos tais que o valor da tangente é igual a -1:

$\tan \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \alpha = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee \alpha = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Representação da tangente no círculo trignométrico



De acordo com o círculo trignométrico da tangente sabemos que $\lim_{\alpha \to \frac{3\pi}{2}^-} \tan \alpha = +\infty$.

Opção(B)

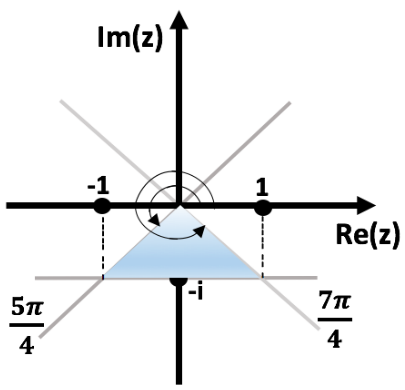
6. Vamos calcular $\tan \alpha$:

   $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{(frac1\sqrt{5})^2} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = 5 - 1 \Leftrightarrow \tan \alpha = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow \tan \alpha = \pm 2$

   Sabendo que $\cos \alpha < 0$ então o declive da reta r também é negativo. Logo o declive da reta é igual a: $m_r = \tan \alpha = -2$

   Opção(C)

7. Sabendo que $\frac{5\pi}{4} \leq arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \Leftrightarrow \pi + \frac{\pi}{4} \leq arg(z) \leq 2\pi - \frac{\pi}{4}$, vamos representar, no plano complexo, a condição $\frac{5\pi}{4} \leq arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \wedge Im(z) \geq -1$:



A região definida pela condição é um triângulo, calculando a sua área:

$$A_{triângulo} = \frac{b \times a}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

Opção(D)

8. De acordo com a sucessão temos que:

   Para $n \leq 20, \quad 1 \leq u_n \leq 20$

   Para $n > 20, \quad u_n = -1 \;\vee\; u_n = 1$

   Portanto a sucessão u_n é limitada, $-1 \leq u_n \leq 20$.

   Opção(C)

Grupo II

1. Vamos começar por simplificar e passar para a forma algébrica os números complexos z_1 e z_2.

   $z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} = \frac{1-3i^3}{1+i} = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i+3i-3i^2}{1+1} = \frac{1+2i+3}{2} = \frac{4+2i}{2} = 2+i$

   $z_2 = -3kcis(\frac{3\pi}{2}) = -3k[\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})] = -3k(0-i) = 3ki$

   Sabemos que no plano complexo, a distância entre a imagem geométrica de z_1 e a imagem geométrica de z_2 é igual a $\sqrt{5}$, logo vem que:

   $|z_1 - z_2| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |2+i-3ki| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |2+i(1-3k)| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{2^2+(1-3k)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \sqrt{4+1-6k+9k^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5-6k+9k^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5-6k+9k^2 = 5 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow -6k+9k^2 = 0 \Leftrightarrow k(-6+9k) = 0 \Leftrightarrow k=0 \vee -6+9k=0 \Leftrightarrow k=0 \vee k=\frac{6}{9}$

   Como $k \in \mathbb{R}^+, \; k = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

2.

   2.1. O ponto T pertence ao eixo Oz logo tem abcissa e ordenada nulas e como pertence ao plano $z=3$ as suas coordenadas são $(0,0,3)$. Como o ponto T' é o simétrico do ponto T relativamente à origem do referencial tem coordenadas $(0,0,-3)$.

A superfície esférica tem diâmetro [TT'] que é igual a 6, assim temos que o raio é igual a 3.

O centro da superfície esférica corresponde à origem do referencial $(0,0,0)$ que é o ponto médio do diâmetro [TT']. A equação da superfície esférica é:

$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=3^2 \;\Leftrightarrow\; x^2+y^2+z^2=9$$

2.2. Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$$\cos(\overrightarrow{UP}\,\hat{}\,\overrightarrow{RS})=\frac{\overrightarrow{UP}.\overrightarrow{RS}}{||\overrightarrow{UP}||\times||\overrightarrow{RS}||}$$

De acordo com a figura 2, os vetores $\overrightarrow{UP}$ e $\overrightarrow{RS}$ têm a mesma direção e sentidos contrários, ou seja, o ângulo formado pelos dois vetores tem amplitude π e $||\overrightarrow{UP}||=||\overrightarrow{RS}||=3$. Assim temos que:

$$\overrightarrow{UP}.\overrightarrow{RS}=\cos(\overrightarrow{UP}\,\hat{}\,\overrightarrow{RS})\times||\overrightarrow{UP}||\times||\overrightarrow{RS}||=\cos(\pi)\times 3\times 3=-9$$

2.3. O ponto Q pertence ao eixo Oy por isso tem abcissa e cota nulas.

Como o ponto Q pertence ao plano PQV, substituindo na equação do plano PQV o valor da abcissa podemos calcular o valor da ordenada do ponto Q:

$$x+y=2 \;\Leftrightarrow\; 0+y=2 \;\Leftrightarrow\; y=2$$

Assim o ponto Q tem coordenadas $(0,2,0)$ e já sabemos que o ponto T tem coordenadas $(0,0,3)$.

Vamos calcular o vetor diretor da reta TQ:

$$\overrightarrow{TQ}=Q-T=(0,2,0)-(0,0,3)=(0,2,-3)$$

Uma condição cartesiana que define a reta TQ é:

$$x=0 \wedge \frac{y}{2}=\frac{z-3}{-3} \;\Leftrightarrow\; x=0 \wedge \frac{y}{2}=\frac{3-z}{3}$$

2.4. De acordo com a figura 2, o prisma tem 8 vértices sendo que o número de conjuntos de 3 vértices que podem ser escolhidos corresponde a ${}^{8}C_3$ (número de casos possíveis).

Um plano perpendicular ao plano xOy tem de conter uma aresta perpendicular a este plano, isto é, uma das 4 arestas laterais do prisma. Por cada aresta lateral existem 6 planos perpendiculares ao plano xOy.

Assim temos que dos ${}^{8}C_3$ de conjuntos de 3 vértices que podem ser escolhidos existem 4×6 possibilidades em que os vértices escolhidos definem um plano perpendicular ao plano xOy (número de casos favoráveis).

P("3 vértices escolhidos definirem plano perpendicular a xOy")= $\frac{4 \times 6}{{}^{8}C_3} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$

3. No contexto da situação descrita, $P(\overline{A} \cup B)$ é a probabilidade de retirar ao acaso uma bola do saco com número par ou superior a seis.

   O número de casos possíveis é igual ao número de bolas que estão no saco, ou seja, n.

   O número de casos favoráveis é igual ao número de bolas que estão no saco com um número superior a 6 $n-6$, mais o número de bolas com número par e inferior ou igual a seis, isto é, 3 bolas (bolas com os números: 2,4,6). Portanto o número de casos favoráveis é igual a $n-6+3 = n-3$.

   Usando a Regra de LaPlace vem que:

$$P(\overline{A} \cup B) = \frac{n^{o}\ de\ casos\ favoráveis}{n^{o}\ de\ casos\ possíveis} = \frac{n-3}{n}$$

4.

   4.1. Vamos começar por calcular $f(0)$:

   $f(0) = 9 - 2,5(e^{1-0} + e^{0-1}) = 9 - 2,5(e + e^{-1}) \approx 1,28$

   Substituindo o valor obtido de $f(0)$ na equação que queremos resolver:

   $\sqrt{[f(0)]^2 + x^2} = 2 \Leftrightarrow [\sqrt{(1,28)^2 + x^2}]^2 = 2^2 \Leftrightarrow (1,28)^2 + x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 - (1,28)^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2,3616} \Leftrightarrow x \approx 1,5, \quad x \in [0,7]$

   A solução $x \approx 1,5$ é o valor da abcissa do ponto S tal que a distância entre o ponto S e o ponto P é igual a duas unidades.

   4.2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função f:

   $f'(x) = [9 - 2,5(e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1})]' = -2,5(-0,2e^{1-0,2x} + 0,2e^{0,2x-1}) =$

$= -0,5(-e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1})$

Os extremos relativos de f correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,5(-e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1}) = 0 \Leftrightarrow -e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1} = 0 \Leftrightarrow e^{1-0,2x} = e^{0,2x-1} \Leftrightarrow 1 - 0,2x = 0,2x - 1 \Leftrightarrow -0,4x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{0,4} \Leftrightarrow x = 5$

De modo a estudarmos a monotonia da função f vamos construir um quadro de sinal:

x	0		5		7
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	Mínimo	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	Mínimo

A função f tem um máximo para $x = 5$, logo o valor máximo da função f é:

$$f(5) = 9 - 2,5(e^{1-0,2\times 5} + e^{0,2\times 5-1}) = 4 \text{ m}$$

Concluímos que o barco não pode passar por baixo da ponte visto que a distância da superfície da água ao topo do mastro é igual a 6 metros e a distância máxima entre a superfície da água e a ponte é igual a 4 metros.

5.

5.1. Calculando o valor da função g no ponto $x = 1$: $g(1) = 2$

Calculando o valor dos limites laterais da função g no ponto $x = 1$:

► $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} [3 + \frac{\sin(x-1)}{1-x}] = 3 + \lim\limits_{x\to 1^+} -\frac{\sin(x-1)}{x-1} = 3 - \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = (*_1)$

Fazendo a mudança de variável: $y = x - 1$ $(y \to 0^+$ quando $x \to 1^+)$

$(*_1) = 3 - \lim\limits_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 3 - 1 = 2$ (Limite notável)

► $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(1+x)(1-x)}{-(e^{x-1}-1)} = \lim\limits_{x\to 1^-} -\frac{(1+x)(1-x)}{(e^{x-1}-1)} =$
$= \lim\limits_{x\to 1^-} -(1+x)\frac{(1-x)}{(e^{x-1}-1)} = 2 \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(x-1)}{(e^{x-1}-1)} = (*_2)$

Fazendo a mudança de variável: $y = x - 1$ $(y \to 0^-$ quando $x \to 1^-)$

$(*_2) = 2 \lim\limits_{y \to 0^-} \frac{y}{(e^y - 1)} = 2 \times \frac{1}{1} = 2$ (Limite notável)

Como $g(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$, então a função g é contínua em $x = 1$.

5.2. Vamos resolver a equação $g(x) = 3$ no intervalo $]4, 5[$, isto é, no ramo onde a função g é válida para $x > 1$:

$g(x) = 3 \Leftrightarrow 3 + \frac{\sin(x-1)}{1-x} = 3 \Leftrightarrow \frac{\sin(x-1)}{1-x} = 0 \wedge 1 - x \neq 0 \Leftrightarrow \sin(x-1) = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x - 1 = 0 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Para $k = -1$, $x = 1 - \pi \notin]4, 5[$

Para $k = 0$, $x = 1 \notin]4, 5[$

Para $k = 1$, $x = 1 + \pi \in]4, 5[$

Para $k = 2$, $x = 1 + 2\pi \notin]4, 5[$

Logo, C.S $= \{1 + \pi\}$

5.3. De acordo com a figura 4 a abcissa do ponto A corresponde ao zero da função g para $x < 1$:

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \wedge 1 - e^{x-1} \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \wedge e^{x-1} \neq 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \wedge x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x = -1 \wedge x \neq 1$

Logo o ponto A tem coordenadas $(-1, 0)$, ou seja, a base do triângulo [OAP] é igual a 1.

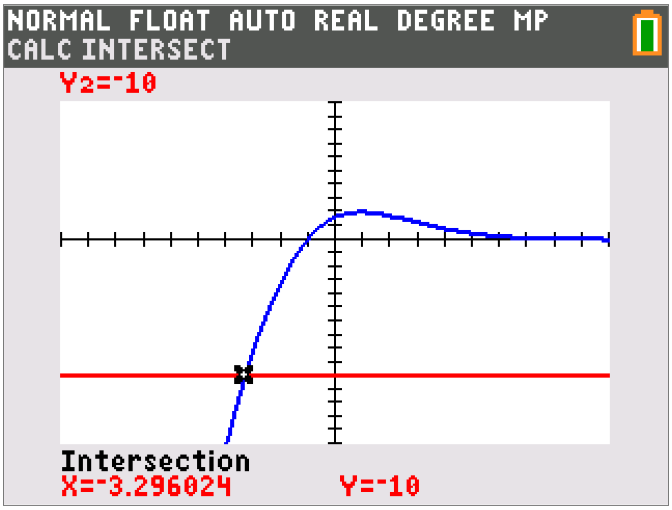
Sabendo que a área do triângulo [OAP] é igual a 5, vem que:

$$A_{[OAP]} = \frac{base \times altura}{2} \Leftrightarrow 5 = \frac{1 \times altura}{2} \Leftrightarrow altura = 10$$

Considerando que o ponto P tem coordenadas $(a, g(a))$, pela observação da figura 4, a altura do triângulo [OAP] é igual ao simétrico do valor da ordenada do ponto P:

$$g(a) = -10 \Leftrightarrow \frac{1-a^2}{1-e^{a-1}} = -10$$

Recorrendo à calculadora gráfica, vamos determinar a constante a (abcissa do ponto P):



Assim, temos que $a \approx -3,3$.

6. As coordenadas do ponto P são $(a, f(a))$.

   Como o ponto Q é ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox e $\overline{OP} = \overline{PQ}$ então as coordenadas do ponto Q são $(2a, 0)$.

   Sabend que os pontos P e Q pertencem à reta r conseguimos calcular o declive da reta r:

$$m_r = \frac{f(a)-0}{0-2a} = -\frac{f(a)}{2a}$$

   Como o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m_r = f'(a)$$

   Logo, vem que:

$$f'(a) + \frac{f(a)}{a} = -\frac{f(a)}{2a} + \frac{f(a)}{2a} = 0$$