Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1ª Fase | Versão 1 | Ensino Secundário | 2016

Grupo I

1. Através da fórmula da probabilidade condicionada temos:

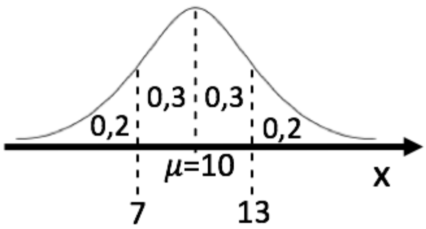
$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A\cap B) = \frac{1}{6}\times\frac{3}{10} \Leftrightarrow P(A\cap B) = \frac{3}{60} \Leftrightarrow P(A\cap B) = \frac{1}{20}$$

Assim temos que:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{20} = \frac{8}{20} + \frac{6}{20} - \frac{1}{20} = \frac{13}{20}$$

Opção(C)

2. Sabendo que $P(7 < X < 10) = 0,3$, podemos traçar o gráfico da variável X que segue uma distribuição normal com $\mu = 10$:



Logo, $P(X > 13) = 0,2$.

Opção(B)

3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{ae^{x-a}-a}{x^2-a^2} = \lim\limits_{x\to a} a\times\frac{e^{x-a}-1}{(x-a)(x+a)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{a}{x+a}\frac{e^{x-a}-1}{x-a} = \frac{a}{2a}\lim\limits_{x\to a}\frac{e^{x-a}-1}{x-a} = \frac{1}{2}$ (Limite notável)

Opção(B)

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)+e^x-x}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} - 1 = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} + \frac{0}{-\infty} = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

   Opção(D)

5. Consideremos o ponto S como sendo o ponto de interseção da reta RQ com o eixo das abcissas.

$$A_{[OPQR]} = \frac{B+b}{2} \times h = \frac{\overline{OP}+\overline{RQ}}{2} \times \overline{OS}$$

   Pela definiçao de cosseno:

$$\cos(2\pi - \alpha) = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \cos(-\alpha) = \frac{\overline{OS}}{1} \Leftrightarrow \overline{OS} = \cos\alpha$$

   Pela definiçao de seno:

$$\sin(2\pi - \alpha) = \frac{\overline{RS}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \sin(-\alpha) = \frac{\overline{RS}}{1} \Leftrightarrow \overline{RS} = -\sin\alpha$$

   Assim vem que:

$$A_{[OPQR]} = \frac{1+1-\sin\alpha}{2} \times \cos\alpha = \frac{2-\sin\alpha}{2} \times \cos\alpha = (1 - \frac{\sin\alpha}{2}) \times \cos\alpha = \cos\alpha - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}$$

   Opção(D)

6. Como $\theta \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$, o número complexo $3cis\theta$ está no 3ºquadrante do plano complexo.

   $z = -3cis\theta$ é o simétrico da imagem geométrica de $3cis\theta$, então z corresponde a uma rotação de π radianos da imagem geométrica de $3cis\theta$, logo, z está no 1ºquadrante do plano complexo.

   Opção(A)

7. Como o triângulo $[ABC]$ é isósceles $B\hat{A}C = B\hat{C}A = 75^o$.

   Portanto $a\hat{B}C = 180 - 75 - 75 = 30^o$.

   Recorrendo à fórmula do produto escalar:

   $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \cos(\overrightarrow{BA}\,\hat{}\,\overrightarrow{BC}) \times ||\overrightarrow{BA}|| \times ||\overrightarrow{BC}|| = \cos 30 \times (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$

   Opção(C)

8. Como $\lim(1 + \frac{1}{n})^n = e$ (Limite notável), então $\lim(v_n) = lne = 1$.

   Assim vem que:

   $\lim(u_n) = \lim(v_n) \Leftrightarrow \lim \frac{kn+3}{2n} = 1 \Leftrightarrow \lim \frac{kn}{2n} + \frac{3}{2n} = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{2} + \frac{3}{+\infty} = 1 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \frac{k}{2} + 0 = 1 \Leftrightarrow k = 2$

   Opção(B)

Grupo II

---

1. Vamos começar por escrever o número complexo $-1 + \sqrt{3}i$ na forma trigonométrica:

   $\rho = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

   $$\begin{cases} tg\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} \\ \theta \in 2^o Quadrante \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

   Logo, $-1 + \sqrt{3}i = 2cis(\frac{2\pi}{3})$

   Vamos simplificar e escrever na forma trigonométrica o número complexo z_1:

   $z_1 = \frac{8cis\theta}{-1+\sqrt{3}i} = \frac{8cis\theta}{2cis(\frac{2\pi}{3})} = \frac{8}{2}cis(\theta - \frac{2\pi}{3}) = 4cis(\theta - \frac{2\pi}{3})$

   $\overline{z_1} \times z_2 = 4cis(-\theta + \frac{2\pi}{3}) \times cis(2\theta) = 4cis(-\theta + \frac{2\pi}{3} + 2\theta) = 4cis(\theta + \frac{2\pi}{3})$

Para o número complexo $\overline{z_1} \times z_2$ ser um número real então $\text{Arg}(\overline{z_1} \times z_2) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\theta + \frac{2\pi}{3} = k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow \ \theta = -\frac{2\pi}{3} + k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = -1, \ \theta < 0 \ \ \notin]0, \pi[$

Para $k = 0, \ \theta = -\frac{2\pi}{3} \ \ \notin]0, \pi[$

Para $k = 1, \ \theta = -\frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{\pi}{3} \ \ \in]0, \pi[$

Para $k = 2, \ \theta = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3} \ \ \notin]0, \pi[$

O valor de $\theta \ \in]0, \pi[$ para o qual $\overline{z_1} \times z_2$ é um número real é $\theta = \frac{\pi}{3}$.

2.

2.1. O produto dos números das duas bolas retiradas pode ser:

- $X = 1$, quando retiramos duas bolas com o número 1;
- $X = 2$, quando retiramos uma bola com o número 1 e outra com o número 2;
- $X = 4$, quando retiramos duas bolas com o número 2 ou quando retiramos uma bola com o número 1 e outra com o número 4;
- $X = 8$, quando retiramos uma bola com o número 2 e outra com o número 4.

Assim a variável X pode assumir os valores 1,2,4 e 8.
Calculando as probabilidades:

$P(X = 1) = \frac{^4C_2}{^9C_2} = \frac{1}{6}$

$P(X = 2) = \frac{^4C_1 \times ^4C_1}{^9C_2} = \frac{4}{9}$

$P(X = 4) = \frac{^4C_2 + ^4C_1 \times ^1C_1}{^9C_2} = \frac{5}{18}$

$P(X=8) = \frac{{}^4C_1 \times {}^1C_1}{{}^9C_2} = \frac{1}{9}$

Construindo a tabela de distribuição de probabilidades da variável X:

x_i	1	2	4	8
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$

2.2. Para o número com 9 algarismos ser ímpar então o último algarismo tem de ser um número ímpar, neste caso só pode ser 1.

Sombram-nos 8 bolas: quatro bolas com o número 2, uma bola com o número 4 e três bolas com o número 1.

A quantidade de números ímpares diferentes que se podem obter é:

$$^8C_4 \times {}^4C_1 \times {}^3C_3 = 280$$

3.

3.1. O ponto A tem cota 1, ou seja, a distância do ponto A ao plano xOy é igual a 1, assim a superfície esférica de centro em A e tangente ao plano xOy tem raio 1.

A equação da superfície esférica de centro em A e tangente ao plano xOy é:

$$(x-(-1))^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1^2 \ \Leftrightarrow\ (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$$

3.2. De acordo com a figura 3, sabemos que o ponto V tem abcissa igual a -2 e ordenada igual a 2.

Como o ponto V pertence ao plano BCV, substituindo na equação do plano BCV o valor da ordenada podemos calcular o valor da cota do ponto V:

$$3y + z - 10 = 0 \ \Leftrightarrow\ 3\times 2 + z - 10 = 0 \ \Leftrightarrow\ z = 4$$

Logo o vértice V tem coordenadas $(-2, 2, 4)$.

3.3. Vamos começar por determinar uma equação do plano α.

O plano α é perpendicular à reta AC então $\overrightarrow{AC}$ é um vetor normal a este plano:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3,3,1) - (-1,1,1) = (-2,2,0)$$

Logo, $\alpha : -2x + 2y + d = 0$

Substituindo as coordenadas do ponto P (que pertence ao plano α) na equação do plano α, conseguimos determinar a constante d:

$$-2 \times 1 + 2 \times (-2) + d = 0 \;\Leftrightarrow\; -2 - 4 + d = 0 \;\Leftrightarrow\; d = 6$$

Assim vem que, $\alpha : -2x + 2y + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha : -x + y + 3 = 0.$

Resolvendo o sistema de equações em ordem à variável comum nas equações dos dois planos (variável y) temos:

$$\begin{cases} -x + y + 3 = 0 \\ 3y + z - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ 3y = 10 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ y = \frac{10-z}{3} \end{cases}$$

As equações cartesianas da reta que corresponde à intersecção dos planos α e BCV são da forma:

$$x - 3 = y = \frac{10-z}{3} \;\Leftrightarrow\; \frac{x-3}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-10}{-3}$$

Ou seja, a reta passa no ponto $(3, 0, 10)$ e tem vetor diretor $(1, 1, -3)$.

Uma equação vetorial desta reta é:

$$(x, y, z) = (3, 0, 10) + k(1, 1, -3), \quad k \in \mathbb{R}$$

4.

4.1. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função h:

$h'(t) = [20 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t) + t\sin(2\pi t)]' = -\frac{2\pi}{2\pi}\sin(2\pi t) + \sin(2\pi t) + 2\pi t\cos(2\pi t) =$
$= 2\pi t\cos(2\pi t)$

Os extremos relativos de h correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$h'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\pi t\cos(2\pi t) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\pi t = 0 \vee \cos(2\pi t) = 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t = 0 \vee 2\pi t = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; t = \frac{\pi}{4\pi} + \frac{k\pi}{2\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; t = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

Para $k = -1, \;\; t = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \;\; \notin [0, 1]$

Para $k=0$, $t=\frac{1}{4} \quad \in [0,1]$

Para $k=1$, $t=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4} \quad \in [0,1]$

Para $k=2$, $t=\frac{1}{4}+\frac{2}{2}=\frac{5}{4} \quad \notin [0,1]$

De modo a estudarmos a monotonia da função h vamos construir um quadro de sinal:

t	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		1
$h'(t)$	0	+	0	-	0	+	+
$h(t)$	Mínimo	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	Mínimo	$\nearrow$	Máximo

Calculando o valor dos mínimos e máximos temos:

$h(0)=20+\frac{1}{2\pi}\cos(0)+0=20+\frac{1}{2\pi}$

$h(\frac{1}{4})=20+\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi\times\frac{1}{4})+\frac{1}{4}\sin(2\pi\times\frac{1}{4})=20+\frac{1}{4}=\frac{81}{4}$

$h(\frac{3}{4})=20+\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi\times\frac{3}{4})+\frac{3}{4}\sin(2\pi\times\frac{3}{4})=20-\frac{3}{4}=\frac{77}{4}$

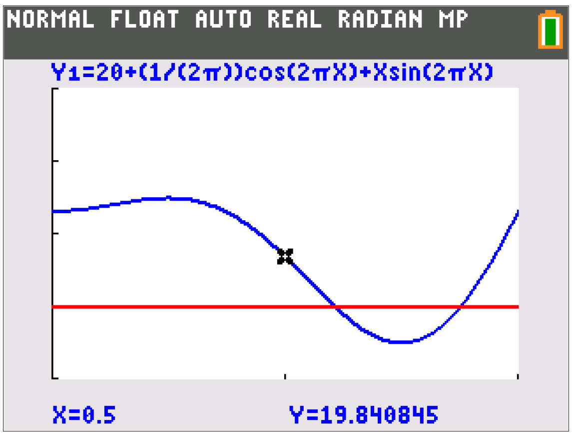
$h(1)=20+\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi)+\sin(2\pi)=20+\frac{1}{2\pi}$

Concluímos que o máximo absoluto de $h(t)$ é $h(\frac{1}{4})$, logo $M=\frac{81}{4}$ e o mínimo absoluto é $h(\frac{3}{4})$, ou seja, $m=\frac{77}{4}$.

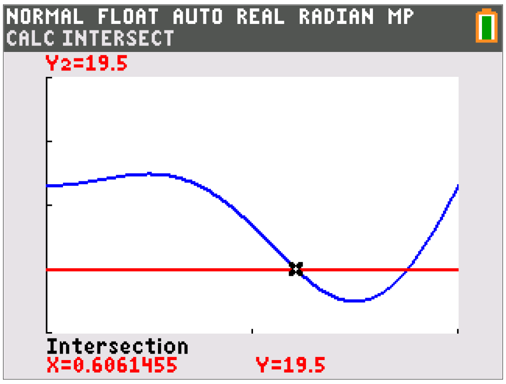
O valor da amplitude de oscilação do tabuleiro da ponte no intervalo $[0,1]$ é:

$$A=M-m=\frac{81}{4}-\frac{77}{4}=\frac{4}{4}=1$$

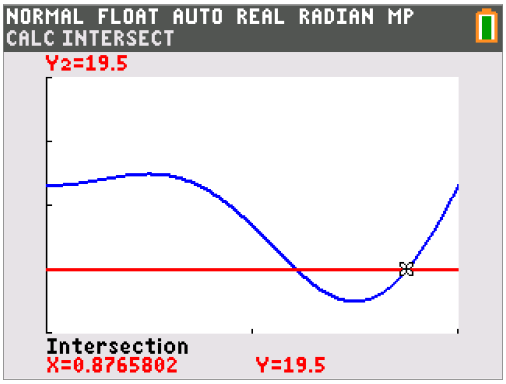
4.2. Reproduzindo na calculadora o gráfico da função h e a reta de equação $y=19,5$ na janela sugerida $y\in[19,21]$ temos:



Recorrendo à calculadora gráfica vamos determinar os valores aproximados às milésimas de a e b:



$a \approx 0,606$



$b \approx 0,877$

Logo, $b - a \approx 0,877 - 0,606 \approx 0,27$

O valor de $b - a$ representa o intervalo de tempo, em minutos, em que a distância do ponto P do tabuleiro a um ponto fixo foi inferior a 19,5 metros. Durante aproximadamente 0,27 minutos a distância do ponto P do tabuleiro a um ponto fixo foi inferior a 19,5 metros.

5.

5.1. Calculando o valor de p:

$$p = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1) = e^{-1}((-1)^2 - 1 + 1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Logo temos que:

$$q = -\frac{1}{p} = -e$$

Sabendo que o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -1 é igual ao valor da derivada nesse ponto, então o valor de p é o declive da reta tangente a f no ponto de abcissa -1.

Como q é o simétrico do inverso de p, então o seu valor corresponde ao declive de uma reta perpendicular à reta tangente a f no ponto de abcissa -1.

5.2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função f:

$f''(x) = [e^x(x^2+x+1)]' = e^x(x^2+x+1)+(2x+1)e^x = e^x(x^2+x+1+2x+1) =$
$= e^x(x^2+3x+2)$

Os pontos de inflexão correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^x(x^2+3x+2) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^x = 0_{\,(Eq.imp.)} \;\vee\; x^2+3x+2 = 0$

$a = 1 \qquad b = 3 \qquad c = 2$

Usando a fórmula resolvente:

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{9-4\times1\times2}}{2\times1} \Leftrightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-3+1}{2} \vee x = \frac{-3-1}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; x = -1 \vee x = -2$

Assim, os pontos de inflexão da função f têm abcissas -2 e -1.

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

x	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	-	0	$+$
$f(x)$	$\smile$	P.I.	$\frown$	P.I.	$\smile$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]-2,1[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]-\infty,-2[\,\cup\,]-1,+\infty[$.

6.

6.1. $D_f =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ e f é contínua no seu domínio pois resulta de operações entre funções contínuas neste domínio, por isso as duas únicas possíveis assíntotas verticais da função f são as retas de equação $x=-1$ e $x=1$.

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \ln(\frac{x-1}{x+1}) = \ln(\frac{-1^- -1}{-1^- +1}) = \ln(\frac{-2}{0^-}) = \ln(+\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \ln(\frac{x-1}{x+1}) \ln(\frac{1^+ -1}{1^+ +1}) = \ln(\frac{0^+}{2}) = \ln 0^+ = -\infty$

Como $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ concluímos que $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais da função f.

6.2. Como a reta é secante ao gráfico de f nos pontos de abcissas a e $-a$ então quer dizer que intersecta a função f nos pontos de coordenadas $(a, f(a))$ e $(-a, f(-a))$, onde $f(a) = \ln(\frac{a-1}{a+1})$ e $f(-a) = \ln(\frac{-a-1}{-a+1})$.

Calculando o declive da reta:

$$m = \frac{f(a)-f(-a)}{a-(-a)} = \frac{\ln(\frac{a-1}{a+1})-\ln(\frac{-a-1}{-a+1})}{2a} = \frac{\ln(\frac{(a-1)(-a+1)}{(a+1)(-a-1)})}{2a} = \frac{\ln(\frac{-(a-1)(a-1)}{-(a+1)(a+1)})}{2a} = \frac{\ln\frac{(a-1)^2}{(a+1)^2}}{2a} =$$
$$= \frac{\ln(\frac{a-1}{a+1})^2}{2a} = \frac{2\ln(\frac{a-1}{a+1})}{2a} = \frac{\ln(\frac{a-1}{a+1})}{a}$$

A equação da reta secante ao gráfico de f é da forma:

$$y = mx + b \iff y = \frac{\ln(\frac{a-1}{a+1})}{a}x + b$$

Substituindo na equação da reta o ponto de coordenadas $(a, f(a))$, conseguimos calcular a constante b (ordenada na origem):

$$y = \frac{\ln(\frac{a-1}{a+1})}{a}x + b \iff \ln(\frac{a-1}{a+1}) = \frac{\ln(\frac{a-1}{a+1})}{a} \times a + b \iff \ln(\frac{a-1}{a+1}) = \ln(\frac{a-1}{a+1}) + b \iff$$
$$\iff b = \ln(\frac{a-1}{a+1}) - \ln(\frac{a-1}{a+1}) \iff b = \ln(\frac{(a-1)(a+1)}{(a+1)(a-1)}) \iff b = \ln 1 \iff b = 0$$

Como a ordenada na origem é igual a zero então a reta passa na origem do referencial.