Proposta de Resolução do Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1ª Fase | Versão 1 | Ensino Secundário | 2015

Grupo I

1. Existem 2 possibilidades para sentar os dois rapazes nas extremidades do banco porque eles podem trocar entre si, ou seja, 2!.

   Nos restantes 4 lugares do meio vamos sentar as 4 raparigas sendo que também elas podem trocar de lugar entre si, logo temos 4! maneiras de as sentar.

   Portanto o número de maneiras de sentar os dois rapazes e as quatro raparigas de modo que, fique um rapaz em cada extremidade do banco é igual a:

   $$2! \times 4! = 48$$

   Opção(C)

2. Vamos começar por calcular $P(B)$:

   $$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0,7 = 0,3$$

   Sabendo que $P(A \cup B) = 0,5$, vem que:

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \ \Leftrightarrow \ 0,5 = 0,4 + 0,3 - P(A \cap B) \ \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \ P(A \cap B) = 0,2$

   Segundo as leis de De Morgan:

   $$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,2 = 0,8$$

   Opção(C)

3. Usando as propriedades dos logaritmos e as regras das potências temos:

$$log_3 \frac{3^k}{9} = log_3 \frac{3^k}{3^2} = log_3 3^{k-2} = (k-2) log_3 3 = (k-2) \times 1 = k-2$$

Opção(B)

4. $\lim u_n = \lim n^2 = (+\infty)^2 = +\infty$

Assim vem que:

$\lim f(u_n) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{+\infty} + 0 = 0$ (Limite notável)

Opção(A)

5. Considerando o triângulo retângulo [OCD], pela definição de tangente temos:

$$\tan \alpha = \frac{\overline{DC}}{\overline{OC}} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{\overline{DC}}{1} \Leftrightarrow \overline{DC} = \tan \alpha$$

Considerando o triângulo retângulo [OBA], pela definição de seno temos:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BA}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{BA}}{1} \Leftrightarrow \overline{BA} = \sin \alpha$$

Considerando o triângulo retângulo [OBA], pela definição de cosseno temos:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{OB}}{1} \Leftrightarrow \overline{OB} = \cos \alpha$$

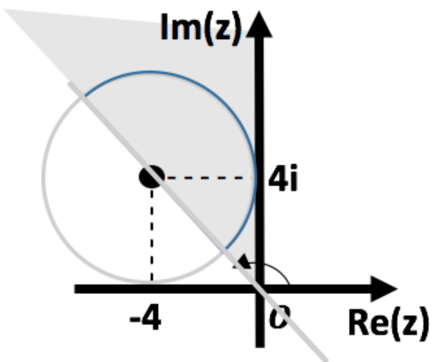
De acordo com a figura 1, a área do quadrilátero [ABCD] é igual a:

$A_{[ABCD]} = A_{[OCD]} - A_{[OBA]} = \frac{\overline{OC} \times \overline{DC}}{2} - \frac{\overline{OB} \times \overline{BA}}{2} = \frac{1 \times \tan \alpha}{2} - \frac{\cos \alpha \times \sin \alpha}{2} = \frac{\tan \alpha}{2} - \frac{\sin(2\alpha)}{4}$

Opção(B)

6. $|z+4-4i|=3 \wedge \frac{pi}{2} \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{4} \;\Leftrightarrow\; |z-(-4+4i)|=3 \wedge \frac{pi}{2} \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$

   Sabendo que $|z-(-4+4i)|=3$ define uma circunferência de centro no afixo do número complexo $-4+4i$ e raio igual a 3 e que $\frac{pi}{2} \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$ é a região do 3º quadrante limitada pelo semieixo imaginário positivo e a bissetriz dos quadrantes pares, vamos representar no plano complexo a linha definida pela condição $|z-(-4+4i)|=3 \wedge \frac{pi}{2} \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$:



   Logo o comprimento da linha definida pela condição anterior, é igual a metade do perímetro da circunferência de raio 3, ou seja, $P = \frac{2\pi \times raio}{2} = \frac{2\pi \times 3}{2} = 3\pi$.

   Opção(C)

7. De acordo com a figura 2, a reta AB tem ordenada na origem negativa por isso podemos excluir as opções de resposta B e C.

   Como o triângulo [ABC] é equilátero os seus ângulos internos medem, cada um, 60^o. Calculando o declive da reta AB:

$$m = \tan(A\hat{B}C) = \tan 60^o = \sqrt{3}$$

   Opção(D)

8. $u_1 = a$

   $u_2 = -3u_1 + 2 = -3a + 2$

$u_3 = -3u_2 + 2 = -3(-3a + 2) + 2 = 9a - 6 + 2 = 9a - 4$

Opção(B)

Grupo II

1. Vamos começar por simplificar e escrever o número complexo z na forma trigonométrica.

   $z = \frac{-2+2i^{19}}{\sqrt{2}cis\theta} = \frac{-2+2i^{3}}{\sqrt{2}cis\theta} = \frac{-2-2i}{\sqrt{2}cis\theta}$

   O número complexo $-2-2i$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares (3º quadrante) e $|-2-2i| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

   Ou seja, $-2-2i = 2\sqrt{2}cis(\pi + \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}cis(\frac{5\pi}{4})$

   Logo, temos que:

   $z = \frac{-2-2i}{\sqrt{2}cis\theta} = \frac{2\sqrt{2}cis(\frac{5\pi}{4})}{\sqrt{2}cis\theta} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}cis(\frac{5\pi}{4} - \theta) = 2cis(\frac{5\pi}{4} - \theta)$

   Para o número complexo z ser um número imaginário puro então $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

   $\frac{5\pi}{4} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} - k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

   Para $k = 0$, $\theta = \frac{3\pi}{4}\ \in]0, 2\pi[$

   Para $k = 1$, $\theta = \frac{3\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4}\ \notin]0, 2\pi[$

   Para $k = -1$, $\theta = \frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{4}\ \in]0, 2\pi[$

   Para $k = -2$, $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}\ \notin]0, 2\pi[$

   Os valores de θ para os quais z é um imaginário puro são $\theta = \{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$.

2.

   2.1. Consideremos os acontecimentos:

C: O funcionário reside em Coimbra
M: O funcionário é mulher

Vamos contruir uma tabela de dupla entrada de modo a organizar os dados:

	C	$\overline{C}$	
M	$0,4-0,35=0,05$	$0,6-0,15=0,45$	0,5
$\overline{M}$	$0,5-0,15=0,35$	$0,3\times 0,5=0,15$	0,5
	0,4	0,6	1

Queremos determinar a probabilidade de o funcionário escolhido ser mulher, sabendo que reside em Coimbra, usando a fórmula da probabilidade condicionada vem que:

$$P(M|C)=\frac{P(M\cap C)}{P(C)}=\frac{0{,}05}{0{,}4}=\frac{1}{8}$$

2.2. A Regra de LaPlace diz que a probabilidade de um certo acontecimento é igual ao quociente do número de casos favoráveis a esse acontecimento pelo número de casos possíveis do mesmo acontecimento.

Neste caso, o número de casos possíveis é o número de grupos que podemos formar na escolha de 3 dos 80 funcionários da empresa sendo que a ordem de escolha não interessa, ou seja, ${}^{80}C_3$.

Considerando que a empresa tem 80 funcionários e sabendo que 40% deles residem em Coimbra, então 32 dos 80 funcionários residem em Coimbra.

Haver no máximo dois funcionários a residir em Coimbra é igual à diferença entre o número total de grupos de 3 funcionáios que é ${}^{80}C_3$ com o número de grupos formados por 3 funcionários que residem em Coimbra ou seja, ${}^{32}C_3$.

Assim, usando a Regra de Laplace, a probabilidade de haver no máximo dois funcionários a residir em Coimbra é igual a:

$$\frac{{}^{80}C_3-{}^{32}C_3}{{}^{80}C_3}$$

3.

3.1. Para calcularmos o volume da esfera primeiro precisamos de determinar o raio da esfera.

De acordo com a figura 3, o raio da esfera é:

$$r = 16 - d(0) = 16 - [10 + (5-0)e^0] = 16 - 15 = 1 \text{ cm}$$

Calculando o volume da esfera, temos:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\pi}{3} \approx 4,19$$

3.2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada da função d:

$d'(t) = [10 + (5-t)e^{-0,05t}]' = -e^{-0,05t} - 0,05e^{-0,05t}(5-t) =$
$= e^{-0,05t}[-1 - 0,05(5-t)] = e^{-0,05t}(-1 - 0,25 + 0,05t) = e^{-0,05t}(-1,25 + 0,05t)$

Os extremos de d correspondem aos zeros da primeira derivada, logo temos que:

$d'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-0,05t}(-1,25 + 0,05t) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-0,05t} = 0_{\,(Eq.imp.)} \;\vee$
$\vee\; -1,25 + 0,05t = 0 \;\Leftrightarrow\; t = \frac{1,25}{0,05} \;\Leftrightarrow\; t = 25$

De modo a estudarmos a monotonia da função d vamos construir um quadro de sinal:

t	0		25	$+\infty$
$d'(t)$	-	-	0	+
$d(t)$	15	$\searrow$	Mínimo	$\nearrow$

Assim temos que o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima é $t = 25$ segundos.

4.

4.1. Vamos verificar se existem assíntotas verticais:

Como $x = \frac{1}{2}$ é um possível ponto de descontinuidade da função f, então $x = \frac{1}{2}$ é a única possível assíntota vertical da função f.

A função f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$ pois os dois ramos da função resultam de operações entre funções contínuas neste domínio.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{\sqrt{e}}{2} \times \frac{\sqrt{e}(\frac{e^x}{\sqrt{e}}-1)}{2(x-\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{e}}{2} \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{e^{x-\frac{1}{2}}-1}{x-\frac{1}{2}} = (*_1)$$

Fazendo a mudança de variável: $y = x - \frac{1}{2}$ $\left(y \to 0^- \text{ quando } x \to \frac{1}{2}^-\right)$

$(*_1) = \frac{\sqrt{e}}{2} \lim_{y\to 0^-} \frac{e^y-1}{y} = \frac{\sqrt{e}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{e}}{2}$ (Limite notável)

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} (x+1)\ln x = (\tfrac{1}{2}+1)\ln\tfrac{1}{2} = \frac{3\ln(2^{-1})}{2} = -\frac{3\ln 2}{2}$$

Como $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) \neq \pm\infty$ e $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) \neq \pm\infty$ concluímos que $x = \frac{1}{2}$ não é assíntota vertical da função f.

4.2. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da segunda derivada da função f para $x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$:

$$f'(x) = [(x+1)\ln x]' = \ln x + (x+1)\frac{1}{x} = \ln x + 1 + \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = (\ln x + 1 + \tfrac{1}{x})' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

Os pontos de inflexão de f correspondem aos zeros da segunda derivada, logo temos que:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x = 1 \wedge x^2 \neq 0$ $(x \in]\frac{1}{2}, +\infty[)$

Assim, o único ponto de inflexão da função f tem abcissa igual a 1.

De modo a sabermos o intervalo em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo e concavidade voltada para cima, vamos construir um quadro de sinal:

x	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$f''(x)$	n.d.	-	0	$+$
$f(x)$	n.d.	$\frown$	P.I.	$\smile$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]\frac{1}{2}, 1[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]1, +\infty[$. O ponto de inflexão da função f tem coordenadas $(1, f(1))$, ou seja, $(1, 0)$.

4.3. A função f é contínua em $[\frac{1}{2}, +\infty[$ pois resulta de operações de funções contínuas neste intervalo. Logo f também é contínua em $[1, e]$ porque $[1, e] \subset [\frac{1}{2}, +\infty[$.

Calculando os valores de $f(1)$ e $f(e)$:

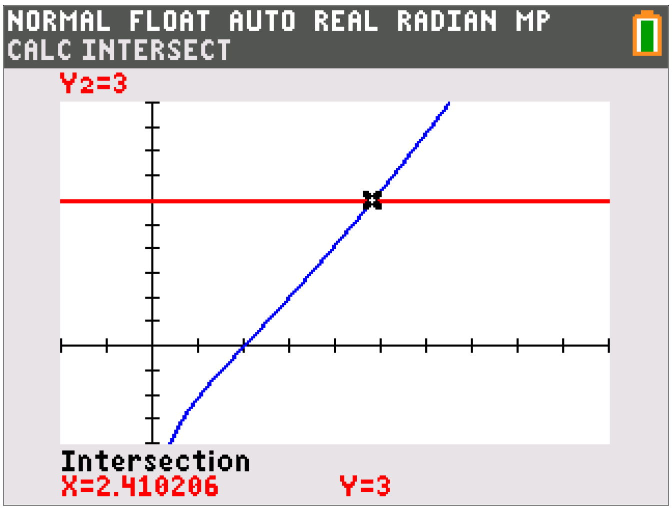
$$f(1) = (1 + 1)\ln 1 = 0$$

$$f(e) = (e + 1)\ln e = e + 1$$

Assim temos que $f(1) < 3 < f(e)$.

Pelo Teorema de Bolzano existe uma constante $c \in]1, e[$ tal que $f(c) = 3$, isto é, a equação $f(x) = 3$ tem, pelo menos, uma solução em $]1, e[$.

Determinando a solução da equação $f(c) = 3$ com a ajuda da calculadora gráfica:



Logo, $c \approx 2,41$.

5.

5.1. O vetor de coordenadas $(1, -2, 1)$ é um vetor normal do plano α bem como de todos os planos paralelos a este plano.

Assim, uma equação do plano paralelo ao plano α é da forma: $x - 2y + z + d = 0$

Substituindo as coordenadas do ponto A na equação do plano, conseguimos determinar a constante d:

$$x - 2y + z + d = 0 \Leftrightarrow 0 + 0 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$$

Assim, uma equação do plano paralelo ao plano α que passa no ponto A é:

$$x - 2y + z - 2 = 0$$

5.2. Vamos começar por determinar a distância entre A e B:

$$d(AB) = \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

O segmento de reta [AB] é um diâmetro da superfície esférica logo o raio é:

$$r = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

O centro da superfície esférica é ponto médio do segmento de reta [AB]:

$$\text{C} = \left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (2, 0, 1)$$

Uma equação cartesiana que define a superfície esférica da qual o segmento de reta [AB] é um diâmetro é:

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$$

5.3. Com as coordenadas dos pontos A e B podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 0, 0) - (0, 0, 2) = (4, 0, -2)$$

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

Sabendo que A$(0,0,2)$ e P$(4,y,0)$ com $y \in \mathbb{R}^+$, podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AP}$ e a sua norma:

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (4,y,0) - (0,0,2) = (4,y,-2)$$

$$||\overrightarrow{AP}|| = \sqrt{4^2 + y^2 + (-2)^2} = \sqrt{20 + y^2}$$

Usando a fórmula do ângulo formado por dois vetores temos que:

$\cos(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AP}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}}{||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AP}||} \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{(4,0,-2).(4,y,-2)}{\sqrt{20} \times \sqrt{20+y^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{16+0+4}{\sqrt{20 \times (20+y^2)}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{20}{\sqrt{400+20y^2}} \Leftrightarrow \sqrt{400+20y^2} = 40 \Leftrightarrow (\sqrt{400+20y^2})^2 = (40)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 400 + 20y^2 = 1600 \Leftrightarrow y^2 = \frac{576-400}{20} \Leftrightarrow y^2 = \frac{1600-400}{20} \Leftrightarrow y^2 = 60 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{60} \Leftrightarrow y = \sqrt{60} \Leftrightarrow y = 2\sqrt{15}, \quad y \in \mathbb{R}^+$

6. Vamos começar por determinar a expressão algébrica da primeira derivada das funções f e g:

$$f'(x) = [1 - \cos(3x)]' = 3\sin(3x)$$
$$g'(x) = [\sin(3x)]' = 3\cos(3x)$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abssica a é igual ao valor da derivada nesse ponto, vem que:

$$m_r = f'(a) = 3\sin(3a)$$

Da mesma forma, o declive da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abssica $a + \frac{\pi}{6}$ é igual ao valor da derivada nesse ponto, logo temos que:

$$m_s = g'(a + \tfrac{\pi}{6}) = 3\cos[3(a + \tfrac{\pi}{6})] = 3\cos(3a + \tfrac{\pi}{2}) = 3[-\sin(3a)] = -3\sin(3a)$$

Como as retas r e s são perpendiculares então vem que:

$m_r = -\frac{1}{m_s} \Leftrightarrow 3\sin(3a) = -\frac{1}{-3\sin(3a)} \Leftrightarrow 3\sin(3a) = \frac{1}{3\sin(3a)} \Leftrightarrow 9\sin^2(3a) = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin^2(3a) = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin(3a) = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \sin(3a) = \pm\frac{1}{3}$

Sabendo que a é um número real pertencente ao intervalo $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$ temos que:

$$\frac{\pi}{3} < a < \frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; \pi < 3a < \frac{3\pi}{2}$$

Como $3a \in 3^{o}$ Quadrante, então $\sin(3a) < 0$, ou seja, $\sin(3a) = -\frac{1}{3}$.