

### O que é uma sucessão de números reais?

↔ Uma sucessão  $u$  de números reais é uma função real que vai de  $\mathbb{N}$  para  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Domínio} & & \\
 \mathbf{u}: \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 \text{Ordem} & & \text{Termo geral} \\
 \text{do termo} & & \\
 \mathbf{u}: n & \longrightarrow & f(n)
 \end{array}$$

O contradomínio da sucessão  $u_n$  é o conjunto  $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$

### Definição de limite finito de uma sucessão

$\lim u_n = a \in \mathbb{R}$  ( $u_n \rightarrow a$ ) se,  
para todo o número real  $\delta$  positivo existir uma ordem  $p \in \mathbb{N}$  tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - a| < \delta$$

#### Exercício 1

Considera  $u_n = \frac{8n-2}{2n}$   
Usando a definição de limite mostra que  $\lim u_n = \frac{8}{2}$

Seja  $\delta > 0$ ,

$$|u_n - a| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{8n-2}{2n} - \frac{8}{2} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{8n-2-8n}{2n} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| -\frac{2}{2n} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$$

Considere-se  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $p \geq \frac{1}{\delta}$ .  
Então para  $n > p$ ,  $|u_n - \frac{8}{2}| < \delta$  ( $\lim u_n = \frac{8}{2}$ ).

### Sucessão com limite infinito

1.  $\lim u_n = +\infty$ :  
Quando para todo  $L > 0$  existe uma ordem  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L$
2.  $\lim u_n = -\infty$  :  
Quando para todo  $L > 0$  existe uma ordem  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < -L$

## Exercício 2

Considera  $t_n = \frac{n+1}{2}$

Usando a definição de limite mostra que  $\lim t_n = +\infty$

Seja  $L > 0$ ,

$$t_n > L \Leftrightarrow \frac{n+1}{2} > L \Leftrightarrow n+1 > 2L \Leftrightarrow n > 2L-1$$

Considere-se  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $p \geq 2L-1$ .

Então para  $n > p$ ,  $t_n > L$  ( $\lim t_n = +\infty$ ).

## Exercício 3

Considera  $v_n = \frac{6-2n}{6}$

Usando a definição de limite mostra que  $\lim v_n = -\infty$

Seja  $L > 0$ ,

$$v_n < -L \Leftrightarrow \frac{6-2n}{6} < -L \Leftrightarrow 6-2n < -6L \Leftrightarrow 6+6L < 2n \Leftrightarrow n > \frac{6+6L}{2}$$

Considere-se  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $p \geq \frac{6+6L}{2}$ .

Então para  $n > p$ ,  $v_n < -L$  ( $\lim v_n = -\infty$ ).

**Teorema 1 da comparação de sucessões**

- $u_n$  e  $v_n$  são sucessões convergentes
- A partir de uma certa ordem,  $u_n \leq v_n$

Então  $\lim u_n \leq \lim v_n$

## Exercício 4

Considera  $u_n = \frac{4n^2}{n+1}$  e  $v_n = \frac{4n^2 + \cos^2 n}{n+1}$

Mostra que  $u_n \leq v_n$

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos n \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \cos^2 n \leq 1 \Leftrightarrow 4n^2 \leq 4n^2 + \cos^2 n \leq 1 + 4n^2 \Leftrightarrow \frac{4n^2}{n+1} \leq \frac{4n^2 + \cos^2 n}{n+1} \Leftrightarrow u_n \leq v_n \text{ c.q.d.}$$

**Teorema 2 da comparação de sucessões**

- $\lim u_n = +\infty$
- A partir de uma certa ordem,  $u_n \leq v_n$

Então  $\lim v_n = +\infty$

#### Exercício 5

Considera  $u_n = n - \sin n$  e  $v_n = n - 1$

Justifica que  $\lim u_n = +\infty$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin n \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sin n \leq 1 \Leftrightarrow n - 1 \leq n - \sin n \leq n + 1 \Leftrightarrow u_n \geq v_n$$

Como  $\lim v_n = +\infty$  e  $u_n \geq v_n$ , pelo Teorema 2 da comparação de sucessões  $\lim u_n = +\infty$

#### Teorema 3 da comparação de sucessões

- $\lim v_n = -\infty$
- A partir de uma certa ordem,  $u_n \leq v_n$

Então  $\lim u_n = -\infty$

#### Exercício 6

Considera  $u_n = \cos n - n$  e  $v_n = 1 - n$

Justifica que  $\lim u_n = -\infty$

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos n \leq 1 \Leftrightarrow -1 - n \leq \cos n - n \leq 1 - n \Leftrightarrow u_n \leq v_n$$

Como  $\lim v_n = -\infty$  e  $u_n \leq v_n$ , pelo Teorema 3 da comparação de sucessões  $\lim u_n = -\infty$

#### Teorema das sucessões enquadradas

- $u_n$  e  $v_n$  são sucessões convergentes com o mesmo limite  $a$  ( $u_n \rightarrow a$  e  $v_n \rightarrow a$ )
- $w_n$  é uma sucessão tal que, a partir de uma certa ordem,  $u_n \leq w_n \leq v_n$

Então  $\lim w_n = a$

#### Exercício 7

Considera  $u_n = \frac{\cos n + 3n^2}{2n^2 + n}$

Usando o Teorema das sucessões enquadadas determina  $\lim u_n$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos n \leq 1 \Leftrightarrow -1 + 3n^2 \leq \cos n + 3n^2 \leq 1 + 3n^2 \Leftrightarrow \frac{-1+3n^2}{2n^2+n} \leq \frac{\cos n + 3n^2}{2n^2+n} \leq \frac{1+3n^2}{2n^2+n}$$

$$\lim \frac{-1+3n^2}{2n^2+n} = \lim \frac{3n^2}{2n^2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim \frac{1+3n^2}{2n^2+n} = \lim \frac{3n^2}{2n^2} = \frac{3}{2}$$

Pelo teorema das sucessões enquadadas  $\lim \frac{\cos n + 3n^2}{2n^2 + n} = \frac{3}{2}$

### Exercício 8

Considera  $u_n = \left(\frac{n+3}{4n+1}\right)^n$

Usando o Teorema das sucessões enquadradas mostra que  $\lim u_n = 0$ .

$$\begin{array}{r} n+3 \\ \hline 4n+1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} -n - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \hline \end{array}$$

$$D = d \times q + r \Leftrightarrow n + 3 = (4n + 1) \times \frac{1}{4} + \frac{11}{4} \Leftrightarrow \frac{n+3}{4n+1} = \frac{1}{4} + \frac{11}{4(4n+1)} \Leftrightarrow \frac{n+3}{4n+1} = \frac{1}{4} + \frac{11}{16n+4}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{11}{16n+4} \leq \frac{11}{20} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{11}{20} \leq \frac{11}{20} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} + \frac{11}{20} \leq \frac{1}{4} + \frac{11}{20} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} + \frac{11}{20} \leq \frac{16}{20} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \left(\frac{1}{4} + \frac{11}{20}\right)^n \leq \left(\frac{16}{20}\right)^n$$

$$\lim \left(\frac{1}{4}\right)^n = \lim \frac{1}{4^n} = 0$$

$$\lim \left(\frac{16}{20}\right)^n = \lim \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0 \quad \text{porque o numerador é menor que o denominador.}$$

Pelo teorema das sucessões enquadradas  $\lim \left(\frac{n+3}{4n+1}\right)^n = 0$

Nota importante: Conceito de vizinhança de uma sucessão

$$u_n \in V_\delta(a)$$

↓

significa que a partir de uma ordem  $n \geq p$  os termos da sucessão pertencem à vizinhança de raio  $\delta$  de  $a$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} \quad n \geq p \mid |u_n - a| < \delta \Leftrightarrow u_n \in V_\delta(a) \Leftrightarrow u_n \in ]a - \delta, a + \delta[$$