

**Exame Final Nacional de Matemática A**  
**Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2019**

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 1

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

7 Páginas

---

**Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.**  
**É permitido o uso de calculadora.**

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

---

---

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

# Formulário

## Geometria

**Comprimento de um arco de circunferência:**

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área de um polígono regular:**  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

**Área de um sector circular:**

$\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área lateral de um cone:**  $\pi r g$  ( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:**  $4\pi r^2$  ( $r$  – raio)

**Volume de uma pirâmide:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Volume de um cone:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Volume de uma esfera:**  $\frac{4}{3}\pi r^3$  ( $r$  – raio)

## Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão  $(u_n)$ :

**Progressão aritmética:**  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:**  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen} a \cos b + \text{sen} b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos} a \cos b - \text{sen} a \text{sen} b$

$\frac{\text{sen} A}{a} = \frac{\text{sen} B}{b} = \frac{\text{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

## Complexos

$(\rho \text{cis } \theta)^n = \rho^n \text{cis}(n\theta)$  ou  $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \text{cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$  ou  $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

## Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma)$ , então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

## Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$  ( $n \in \mathbb{R}$ )

$(\text{sen } u)' = u' \cos u$

$(\text{cos } u)' = -u' \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

## Limites notáveis

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$  ( $p \in \mathbb{R}$ )

1. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n.  $Oxyz$ , um paralelepípedo retângulo  $[ABCDEFGH]$

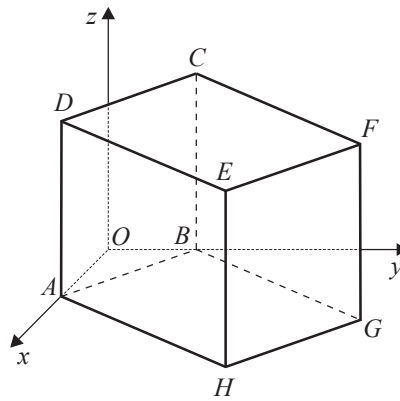


Figura 1

Sabe-se que:

- o vértice  $A$  pertence ao eixo  $Ox$  e o vértice  $B$  pertence ao eixo  $Oy$
- o vértice  $C$  tem coordenadas  $(0,3,6)$  e o vértice  $G$  tem coordenadas  $(6,11,0)$
- o plano  $ABC$  é definido pela equação  $3x + 4y - 12 = 0$

1.1. Determine o volume do paralelepípedo  $[ABCDEFGH]$

1.2. Seja  $P$  o ponto de coordenadas  $(1,-4,3)$ , e seja  $r$  a reta que passa pelo ponto  $P$  e é perpendicular ao plano  $ABC$

Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta  $r$  com o plano  $ABC$

1.3. Escolhe-se, ao acaso, um vértice do paralelepípedo e, seguidamente, também ao acaso, escolhe-se um outro vértice, diferente do anterior.

Designa-se por  $X$  o primeiro vértice escolhido e por  $Y$  o segundo vértice escolhido.

Qual é a probabilidade de a terceira coordenada do vetor  $\overrightarrow{XY}$  ser igual a zero?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2. Uma escola secundária tem apenas turmas de 10.º, 11.º e 12.º anos.

2.1. Relativamente aos alunos desta escola, sabe-se que:

- $\frac{3}{5}$  dos alunos do 10.º ano são rapazes;
- $\frac{11}{21}$  dos alunos da escola são rapazes;
- $\frac{1}{7}$  dos alunos da escola são rapazes e frequentam o 10.º ano.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola.

Determine a probabilidade de o aluno escolhido ser uma rapariga e não frequentar o 10.º ano.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

2.2. Uma turma dessa escola tem 26 alunos, dos quais 15 são raparigas.

O delegado de turma é um rapaz.

Pretende-se formar uma comissão com três alunos desta turma, para organizar uma festa de fim de ano.

Quantas comissões diferentes, que incluam rapazes e raparigas, se podem formar, sabendo-se que o delegado de turma tem de fazer parte da comissão?

(A) 195

(B) 215

(C) 235

(D) 255

3.

---

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 3.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 3.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

---

**P2001/2002**

3.1. Uma caixa contém duas bolas brancas e três bolas pretas.

Retiram-se, ao acaso e em simultâneo, duas bolas da caixa.

Seja  $X$  a variável aleatória «número de bolas brancas retiradas».

Qual é o valor médio da variável aleatória  $X$ ?

(A) 0,9

(B) 0,8

(C) 0,7

(D) 0,6

3.2. De um triângulo, sabe-se que os comprimentos dos seus lados são 4, 5 e 6

Seja  $\alpha$  a amplitude do maior ângulo interno desse triângulo.

Qual é o valor de  $\text{sen } \alpha$ , arredondado às milésimas?

(A) 0,989

(B) 0,992

(C) 0,995

(D) 0,998

4. O nível,  $N$ , de um som, medido em decibéis, é função da sua intensidade,  $I$ , medida em microwatt por metro quadrado ( $\mu\text{W}/\text{m}^2$ ), de acordo com a igualdade

$$N = 60 + 10 \log_{10} I, \quad \text{com } I > 0$$

Relativamente ao som de um certo despertador, sabe-se que, aumentando a sua intensidade em  $150 \mu\text{W}/\text{m}^2$ , o seu nível passa a ser 1,4% do quadrado do nível inicial.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor da intensidade inicial do som desse despertador, sabendo-se que pertence ao intervalo  $[20,80]$  e que, neste intervalo, esse valor é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) obter o valor pedido;
- apresente esse valor em  $\mu\text{W}/\text{m}^2$ , arredondado às unidades.

5. Para um certo número real  $k$ , é contínua em  $\mathbb{R}$  a função  $f$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log_3 k & \text{se } x = 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$$

Qual é o valor de  $k$ ?

(A) 5

(B) 6

(C) 8

(D) 9

6. Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais diferentes de zero.

Sabe-se que  $2$ ,  $a$  e  $b$  são três termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Sabe-se ainda que  $a - 2$ ,  $b$  e  $2$  são três termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Determine  $a$  e  $b$

7. Na Figura 2, está representado, no plano complexo, o quadrado  $[ABCD]$

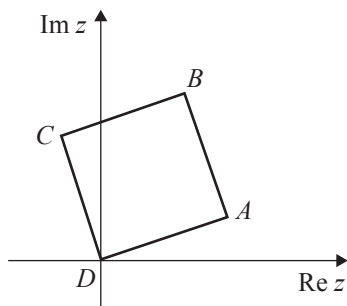


Figura 2

Sabe-se que o ponto  $A$  é o afixo (imagem geométrica) de um número complexo  $z$  e que o ponto  $D$  é o afixo (imagem geométrica) do complexo nulo.

Qual é o número complexo cujo afixo (imagem geométrica) é o ponto  $B$ ?

(A)  $z(1+i)$

(B)  $iz$

(C)  $i^3 z$

(D)  $z(2+i)$

**FIM DO CADERNO 1**

## COTAÇÕES (Caderno 1)

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	1.2.	1.3.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	4.	5.	6.	7.	
12	12	12	13	8	8		12	8	12	8	<b>105</b>

**Prova 635**  
2.<sup>a</sup> Fase  
CADERNO 1



**Exame Final Nacional de Matemática A**  
**Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2019**

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

**Caderno 2**

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

**6 Páginas**

---

**Caderno 2:** 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.  
Não é permitido o uso de calculadora.

8. Considere em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos,  $z_1 = 2 - 3i$  e  $z_2 = 1 - 2i$

Mostre que o afixo (imagem geométrica) do número complexo  $w = \frac{3z_1 - i \overline{z_2}}{1 + i^7}$  pertence à circunferência de centro no afixo (imagem geométrica) de  $z_1$  e raio igual a  $\sqrt{53}$

9.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 9.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 9.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

**P2001/2002**

9.1. Na Figura 3, está representada a região admissível de um problema de Programação Linear.

Esta região corresponde ao sistema

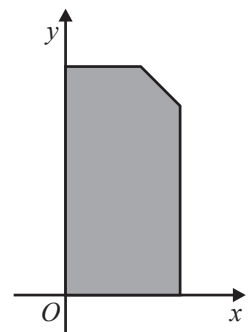
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 150 \\ y \leq 300 \\ x + y \leq 400 \end{cases}$$


Figura 3

Qual é o valor máximo que a função objetivo, definida por  $L = 2x + y$ , pode alcançar nesta região?

(A) 450

(B) 500

(C) 550

(D) 600

**PMC2015**

9.2. Qual é o valor de  $\sin\left(3 \arccos \frac{1}{2}\right)$ ?

(A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C) 0

(D) 1

10. Na Figura 4, está representada, num referencial o.n.  $xOy$ , a reta  $AB$

Sabe-se que:

- o ponto  $A$  pertence ao semieixo negativo  $Ox$  e o ponto  $B$  pertence ao semieixo positivo  $Oy$
- a reta  $AB$  tem equação  $y = 2x + 4$

Seja  $M$  o ponto médio do segmento de reta  $[AB]$

Quais são as coordenadas do ponto  $M$ ?

- (A)  $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$                       (B)  $(-1, 2)$
- (C)  $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$                       (D)  $(-2, 4)$

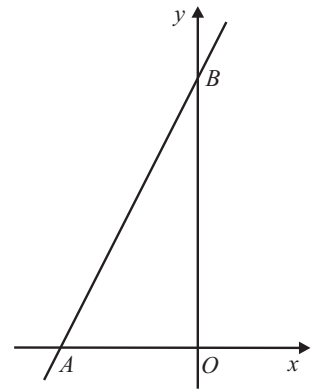


Figura 4

11.

---

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 11.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 11.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

---

**P2001/2002**

11.1. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , a reta  $r$  definida por  $\frac{x-1}{2} = \frac{3-y}{4} = z$

Qual dos seguintes vetores pode ser um vetor diretor de uma reta perpendicular à reta  $r$ ?

- (A)  $\vec{a} (2, 4, 1)$                       (B)  $\vec{b} (-3, 1, 0)$
- (C)  $\vec{c} (1, 1, 2)$                       (D)  $\vec{d} (-4, 2, 0)$

**PMC2015**

11.2. Qual é, para qualquer número real positivo  $a$ , o limite da sucessão  $\left(\frac{n + \ln a}{n}\right)^{n+2}$ ?

- (A)  $a^2$                       (B)  $2a$                       (C)  $a$                       (D)  $\sqrt{a}$

12. Considere a função  $h$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , definida por  $h(x) = \frac{e^x}{x-1}$

12.1. Estude a função  $h$  quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreva as suas equações.

12.2. Resolva, em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , a equação  $(x-1) \times h(x) + 2e^{-x} = 3$

13. Seja  $g$  a função definida em  $]0, \pi[$  por  $g(x) = \frac{1}{4} \cos(2x) - \cos x$

13.1. Estude a função  $g$  quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de  $g$  tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de  $g$  tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de  $g$ , caso este(s) exista(m).

13.2. Seja  $f$  a função, de domínio  $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ , definida por  $f(x) = g(-x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Qual das expressões seguintes também pode definir a função  $f$  ?

(A)  $\sin x + \cos x$

(B)  $-\sin x - \cos x$

(C)  $\sin x - \cos x$

(D)  $-\sin x + \cos x$

14. Na Figura 5, está representado o gráfico da função  $f$ , definida, em  $\mathbb{R}$ , por  $f(x) = x^2$

Considere que um ponto  $P$ , de abcissa positiva, se desloca sobre o gráfico da função  $f$

Para cada posição do ponto  $P$ , seja:

- $r$  a reta tangente ao gráfico de  $f$  nesse ponto;
- $s$  a reta perpendicular a  $r$  e tangente ao gráfico de  $f$
- $Q$  o ponto de tangência da reta  $s$  com o gráfico de  $f$
- $I$  o ponto de intersecção das retas  $r$  e  $s$

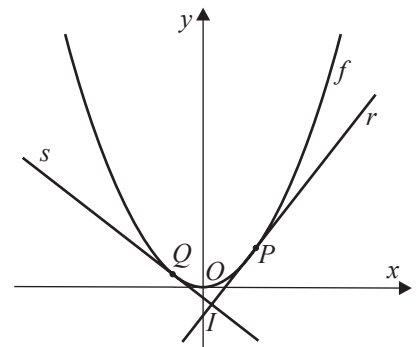


Figura 5

Mostre que, qualquer que seja a abcissa do ponto  $P$ , a ordenada do ponto  $I$  é sempre igual a  $-\frac{1}{4}$

**Sugestão:** Designe a abcissa do ponto  $P$  por  $a$

**FIM**

## COTAÇÕES (Caderno 2)

Item											
Cotação (em pontos)											
8.	9.1.	9.2.	10.	11.1.	11.2.	12.1.	12.2.	13.1.	13.2.	14.	
13	8		8	8		14	13	13	8	10	<b>95</b>

<b>TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)</b>	<b>200</b>
--------------------------------------	------------

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

**Prova 635**  
2.<sup>a</sup> Fase  
CADERNO 2