REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 1
6 Páginas

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 1.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 1.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

1.1. Seja Ω o espaço amostral (espaço de resultados) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos independentes e equiprováveis;
- $P(A \cup B) = 0{,}64$

Qual é o valor de $P(A)$?

(A) $0{,}42$ **(B)** $0{,}40$ **(C)** $0{,}38$ **(D)** $0{,}36$

PMC2015

1.2. Um ponto P desloca-se numa reta numérica, no intervalo de tempo $I = [0{,}4]$ (medido em segundos), de tal forma que a respetiva abcissa é dada por

$$x(t) = \operatorname{sen}(\pi t) + \cos(\pi t), \text{ com } t \in I$$

Qual é a amplitude deste oscilador harmónico?

(A) 1 **(B)** $\sqrt{2}$ **(C)** $\sqrt{3}$ **(D)** 2

2. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ e o ponto P de coordenadas $(1,1,1)$, pertencente a essa superfície esférica.

2.1. Seja $\vec{u} = -2\overrightarrow{OP}$ e seja $Q = P + \vec{u}$

Determine as coordenadas do ponto Q e refira, no contexto do problema, o significado de $[PQ]$

2.2. Seja R o ponto de intersecção da superfície esférica com o semieixo negativo das ordenadas.

Determine a amplitude do ângulo ROP

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

3. Com cinco pessoas, quantos conjuntos com, pelo menos, três pessoas é possível formar?

(A) 60 **(B)** 81 **(C)** 10 **(D)** 16

4. A soma dos dois últimos elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal é 35

Escolhem-se, ao acaso, dois elementos dessa linha.

Determine a probabilidade de esses dois elementos serem iguais.

Apresente o resultado na forma decimal, arredondado às centésimas.

5. Na cidade de Saint Louis, nos Estados Unidos, existe um monumento em forma de arco conhecido como Portal do Oeste. No ponto mais elevado desse arco, encontra-se um miradouro ao qual se acede por um ascensor.

A Figura 1 é uma fotografia dessa estrutura, e a Figura 2 representa um esquema do arco.

Figura 1

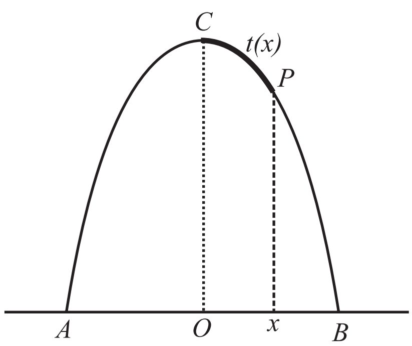

Figura 2

Relativamente à Figura 2, sabe-se que:

- os pontos A e B representam a intersecção do arco com o solo;
- o ponto O é o ponto médio de $[AB]$
- o ponto C representa o miradouro, e a reta OC é um eixo de simetria do arco.

Considere a reta AB como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e em que uma unidade corresponde a um metro.

Admita que o ascensor se está a deslocar no arco CB, do miradouro C para o ponto B

Para cada ponto P, de abcissa x, situado no arco CB, o tempo que o ascensor demora a percorrer o arco CP é dado, em minutos, por

$$t(x) = 0{,}34\left(e^{0{,}0257x} - e^{-0{,}0257x}\right), \text{ com } x \in [0{,}96]$$

Num certo instante, o ascensor encontra-se num ponto F (não coincidente com o ponto C), a uma certa distância da reta OC. Passado algum tempo, o ascensor encontra-se num ponto G

A Figura 3 ilustra a situação.

Sabe-se que:

- a distância do ponto G à reta OC é igual ao triplo da distância do ponto F à mesma reta;
- o tempo que o ascensor demora a percorrer o arco que vai de F até G é igual ao triplo do tempo que demora a percorrer o arco que vai de C até F

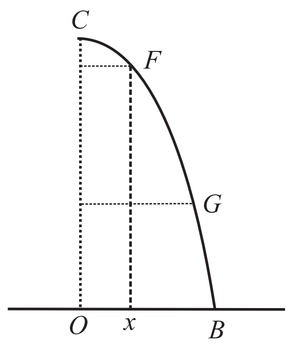

Figura 3

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a distância, x, em metros, do ponto F à reta OC

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor da distância pedida arredondado às décimas.

6. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a expressão $i^0 + i + i^2 + ... + i^{2018}$ é igual a

(A) i **(B)** $-i$ **(C)** $-1+i$ **(D)** $1+i$

7. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \dfrac{n+5}{n+3}$

Estude a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

8. Seja Ω o espaço amostral (espaço de resultados) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}6$
- $P(B) = 0{,}7$

Mostre que $P(B|A) \geq \frac{1}{2}$

9. Para um certo número real a, diferente de zero, são paralelas as retas r e s, definidas, num referencial o.n. xOy, pelas condições $r : ax + 2y + 1 = 0$ e $s : (x, y) = (1,1) + k(a, 2a)$, $k \in \mathbb{R}$

Qual é o valor de a ?

(A) -4 **(B)** 2 **(C)** -2 **(D)** 4

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	
8		12	12	8	12	12	8	12	13	8	**105**

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 2

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 5 Páginas

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.

10.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 10.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 10.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

10.1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$,

- a reta r, definida pela condição $\frac{x-1}{2} = \frac{3-y}{5} = \frac{z}{3}$
- o plano α, definido pela equação $3x - 2z - 3 = 0$

Qual é a posição relativa da reta r e do plano α ?

(A) r é estritamente paralela a α

(B) r e α são concorrentes, mas não perpendiculares.

(C) r é perpendicular a α

(D) r está contida em α

PMC2015

10.2. Seja g uma função real, de domínio $[0,1]$

Sabe-se que a função g não tem mínimo.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) A função g não tem zeros.

(B) A função g não é limitada.

(C) A função g não tem máximo.

(D) A função g não é contínua.

11. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o conjunto

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : z^4 + 16 = 0 \quad \wedge \quad \operatorname{Re}(z) < 0 \right\}$$

Determine os elementos do conjunto A e apresente-os na forma algébrica.

12.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 12.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 12.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

12.1. Um dado cúbico equilibrado tem todas as faces numeradas, umas com o número 0 e as restantes com o número 1

Lança-se o dado três vezes e, em cada lançamento, regista-se o número da face que fica voltada para cima.

Seja X a variável aleatória «produto dos números saídos nos três lançamentos».

A tabela de distribuição de probabilidades da variável X é a seguinte.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{19}{27}$	$\frac{8}{27}$

Quantas faces estão numeradas com o número 1 ?

(A) Duas. **(B)** Três. **(C)** Quatro. **(D)** Cinco.

PMC2015

12.2. Qual é o valor do limite da sucessão $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n}$?

(A) 1 **(B)** e **(C)** e^2 **(D)** $+\infty$

13. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^3 + 6\ln x$

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;

– as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

14. Seja h a função, de domínio $\left[-\frac{\pi}{3}, +\infty\right[$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}(x^2)} & \text{se} \quad -\dfrac{\pi}{3} \leq x < 0 \\ \dfrac{e^x}{x+1} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

14.1. Mostre que a função h é contínua no ponto 0

14.2. Estude a função h quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

14.3. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) A função h é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$

(B) A função h é estritamente crescente em $[0, +\infty[$

(C) A função h tem um máximo para $x = 1$

(D) A função h tem um mínimo para $x = 1$

15. Considere a função f, definida em $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ por $f(x) = \cos x$

Qual dos seguintes conjuntos é o contradomínio da função f?

(A) $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

(B) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

(C) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

(D) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

16. Seja m um número real pertencente ao intervalo $]0,1[$, e seja a um número real positivo.

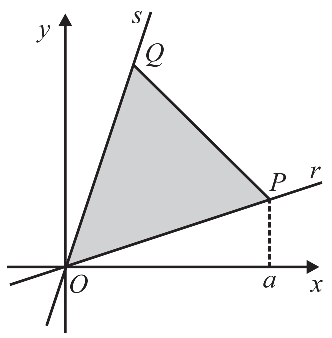

Figura 4

Na Figura 4, estão representadas as retas r e s, que passam na origem do referencial e que têm declives m e $\frac{1}{m}$, respetivamente. Estão também representados os pontos P e Q, pertencentes ao primeiro quadrante. O ponto P pertence à reta r, e o ponto Q pertence à reta s

Sabe-se que o ponto P tem abcissa a e que $\overline{OP} = \overline{OQ}$

Mostre que a área do triângulo $[OPQ]$ é dada por $\frac{a^2}{2}(1 - m^2)$

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item											
Cotação (em pontos)											
10.1.	**10.2.**	**11.**	**12.1.**	**12.2.**	**13.**	**14.1.**	**14.2.**	**14.3.**	**15.**	**16.**	
8		12	8		13	13	13	8	8	12	**95**

TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)	**200**