REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/2.ª Fase

14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2016

VERSÃO 1

Página em branco

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Página em branco

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}2$
- $P(B) = 0{,}3$
- $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}6$

Qual é o valor de $P\left(A|B\right)$?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{5}{6}$

2. O Carlos joga basquetebol na equipa da sua escola.

Admita que, em cada lance livre, a probabilidade de o Carlos encestar é $0{,}4$

Num treino, o Carlos vai executar uma série de cinco lances livres.

Qual é a probabilidade de o Carlos encestar exatamente quatro vezes?

(A) $0{,}01536$ **(B)** $0{,}05184$ **(C)** $0{,}0768$ **(D)** $0{,}2592$

3. Para certos valores de a e de b $(a > 1$ e $b > 1)$, tem-se $\log_a(ab^3) = 5$

Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_b a$?

(A) $\frac{5}{3}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{3}{5}$ **(D)** $\frac{1}{3}$

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln x$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{n}{e^n}$

Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** e **(D)** $+\infty$

5. Na Figura 1, está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1

Sabe-se que:

- os diâmetros $[AC]$ e $[BD]$ são perpendiculares;
- o ponto P pertence ao arco AB
- $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência;
- o ponto R pertence a $[OD]$ e é tal que $[QR]$ é paralelo a $[AC]$

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOP $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

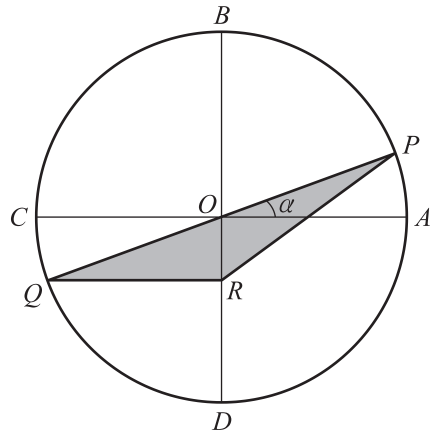

Figura 1

Qual das seguintes expressões dá a área do triângulo $[PQR]$, representado a sombreado, em função de α ?

(A) $\dfrac{\cos(2\alpha)}{4}$ **(B)** $\dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$ **(C)** $\dfrac{\cos(2\alpha)}{2}$ **(D)** $\dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$

6. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z = 3 + 4i$

Sabe-se que z é uma das raízes de índice 6 de um certo número complexo w

Considere, no plano complexo, o polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 6 desse número complexo w

Qual é o perímetro do polígono?

(A) 42 **(B)** 36 **(C)** 30 **(D)** 24

7. Considere, num referencial o.n. xOy, o quadrado definido pela condição

$$0 \leq x \leq 4 \quad \wedge \quad 1 \leq y \leq 5$$

Qual das condições seguintes define a circunferência inscrita neste quadrado?

(A) $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 16$

(B) $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 4$

(C) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$

(D) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$

8. De uma progressão geométrica (u_n), monótona crescente, sabe-se que $u_4 = 32$ e que $u_8 = 8192$

Qual é o quinto termo da sucessão (u_n) ?

(A) 64 **(B)** 128 **(C)** 256 **(D)** 512

Página em branco

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere nove fichas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 9

1.1. Considere duas caixas, U e V

Colocam-se as fichas numeradas de 1 a 5 na caixa U e as fichas numeradas de 6 a 9 na caixa V

Realiza-se a seguinte experiência.

Retira-se, ao acaso, uma ficha da caixa U e retira-se, também ao acaso, uma ficha da caixa V

Sejam A e B os acontecimentos:

A : «*A soma dos números das fichas retiradas é igual a* 10»

B : «*O produto dos números das fichas retiradas é ímpar*»

Determine o valor de $P(B|A)$, sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Na sua resposta:

- explique o significado de $P(B|A)$ no contexto da situação descrita;
- indique os casos possíveis, apresentando cada um deles na forma (u, v), em que u designa o número da ficha retirada da caixa U e v designa o número da ficha retirada da caixa V
- indique os casos favoráveis;
- apresente o valor pedido na forma de fração irredutível.

1.2. Na Figura 2, está representado um tabuleiro com 16 casas, dispostas em quatro filas horizontais $(A, B, C$ e $D)$ e em quatro filas verticais $(1, 2, 3$ e $4)$

Pretende-se dispor as nove fichas (numeradas de 1 a 9) no tabuleiro, de modo que cada ficha ocupe uma única casa e que cada casa não seja ocupada por mais do que uma ficha.

De quantas maneiras diferentes é possível dispor as nove fichas, de tal forma que as que têm número par ocupem uma única fila horizontal?

	1	2	3	4
A				
B				
C				
D				

Figura 2

2. Seja ρ um número real positivo, e seja θ um número real pertencente ao intervalo $]0, \pi[$

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \dfrac{-1+i}{(\rho \operatorname{cis}\theta)^2}$ e $w = -\sqrt{2}\, i$

Sabe-se que $z = w$

Determine o valor de ρ e o valor de θ

3. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α definido pela equação $3x + 2y + 4z - 12 = 0$

3.1. Seja C o ponto de coordenadas $(2, 1, 4)$

Escreva uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α que passa no ponto C

3.2. Seja D o ponto de coordenadas $(4, 2, 2)$

Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta OD com o plano α

3.3. Sejam A e B os pontos pertencentes ao plano α, tais que A pertence ao semieixo positivo Ox e B pertence ao semieixo positivo Oy

Seja P um ponto com cota diferente de zero e que pertence ao eixo Oz

Justifique, recorrendo ao produto escalar de vetores, que o ângulo APB é agudo.

4. Seja f a função, de domínio $\left]-\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 + \operatorname{sen} x}{\cos x} & \text{se } -\dfrac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ x - \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Estude a função f quanto à existência de assíntota oblíqua do seu gráfico.

4.2. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, no intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$

4.3. Seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$

Além do ponto de tangência, a reta r intersecta o gráfico de f em mais dois pontos, A e B, cujas abcissas pertencem ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ (considere que o ponto A é o de menor abcissa).

Determine analiticamente a equação reduzida da reta r e, utilizando a calculadora gráfica, obtenha as abcissas dos pontos A e B

Apresente essas abcissas arredondadas às centésimas.

Na sua resposta, reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver o problema.

5. O José e o António são estudantes de Economia. O José pediu emprestados 600 euros ao António para comprar um computador, tendo-se comprometido a pagar o empréstimo em prestações mensais sujeitas a um certo juro.

Para encontrarem as condições de pagamento do empréstimo, os dois colegas adaptaram uma fórmula que tinham estudado e estabeleceram um contrato.

Nesse contrato, a prestação mensal p, em euros, que o José tem de pagar ao António é dada por

$$p = \frac{600x}{1 - e^{-nx}} \quad (x > 0)$$

em que n é o número de meses em que o empréstimo será pago e x é a taxa de juro mensal.

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** recorrendo a métodos analíticos.

Na resolução do item **5.1.**, pode utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

5.1. O José e o António acordaram que a taxa de juro mensal seria $0{,}3\%$ $(x = 0{,}003)$

Em quantos meses será pago o empréstimo, sabendo-se que o José irá pagar uma prestação mensal de 24 euros?

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

5.2. Determine $\lim\limits_{x \to 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}}$, em função de n, e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

6. Seja g uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}$, tal que:

- para todo o número real x, $(g \circ g)(x) = x$
- para um certo número real a, tem-se $g(a) > a + 1$

Mostre que a equação $g(x) = x + 1$ é possível no intervalo $\left]a, g(a)\right[$

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item Cotação (em pontos)												
I	**1.** a **8.** 8 × 5 pontos												**40**
II	**1.1.** 15	**1.2.** 15	**2.** 15	**3.1.** 5	**3.2.** 15	**3.3.** 10	**4.1.** 15	**4.2.** 15	**4.3.** 15	**5.1.** 15	**5.2.** 15	**6.** 10	**160**
TOTAL													**200**

ESTA FOLHA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

2.ª Fase

VERSÃO 1